



Andiara Valentina de Freitas e Lopes

Mariana Buarque Ribeiro de Gusmão

# REPRESENTAÇÃO GRÁFICA PARA ENGENHARIAS, ARQUITETURA, EXPRESSÃO GRÁFICA E DESIGN

projeções cilíndricas

Andiara Valentina de Freitas e Lopes

Mariana Buarque Ribeiro de Gusmão

# REPRESENTAÇÃO GRÁFICA PARA ENGENHARIAS, ARQUITETURA, EXPRESSÃO GRÁFICA E DESIGN

projeções cilíndricas

| São Paulo | 2023 |



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L864r

Lopes, Andiara Valentina de Freitas e.

Representação gráfica para engenharias, arquitetura, expressão gráfica e design: projeções cilíndricas / Andiara Valentina de Freitas e Lopes, Mariana Buarque Ribeiro de Gusmão. – São Paulo: Pimenta Cultural, 2023.

Livro em PDF

ISBN 978-65-5939-604-7

DOI 10.31560/pimentacultural/2023.96047

1. Geometria. 2. Design. 3. Gráfica. 4. Desenho técnico. I. Lopes, Andiara Valentina de Freitas e. II. Gusmão, Mariana Buarque Ribeiro de. III. Título.

CDD 516

Índice para catálogo sistemático:

I. Geometria

Jéssica Oliveira – Bibliotecária – CRB-034/2023

ISBN da versão impressa (brochura): 978-65-5939-607-8

Copyright © Pimenta Cultural, alguns direitos reservados.

Copyright do texto © 2023 as autoras.

Copyright da edição © 2023 Pimenta Cultural.

Esta obra é licenciada por uma Licença Creative Commons:  
Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional  
- (CC BY-NC-ND 4.0). Os termos desta licença estão  
disponíveis em: <<https://creativecommons.org/licenses/>>.  
Direitos para esta edição cedidos à Pimenta Cultural.  
O conteúdo publicado não representa a posição oficial  
da Pimenta Cultural.

---

<b>Direção editorial</b>	Patricia Bieging Raul Inácio Busarello
<b>Editora executiva</b>	Patricia Bieging
<b>Coordenadora editorial</b>	Landressa Rita Schiefelbein
<b>Diretor de criação</b>	Raul Inácio Busarello
<b>Assistente de arte</b>	Naiara Von Groll
<b>Editoração eletrônica</b>	Peter Valmorbida Potira Manoela de Moraes
<b>Bibliotecária</b>	Jéssica Castro Alves de Oliveira
<b>Imagens da capa</b>	Impulse50 Vector_Corp Solarus Starline
<b>Tipografias</b>	Calibri
<b>Revisão</b>	Landressa Rita Schiefelbein
<b>Autoras</b>	Andiara Valentina de Freitas e Lopes Mariana Buarque Ribeiro de Gusmão

---

**PIMENTA CULTURAL**

São Paulo · SP  
Telefone: +55 (11) 96766 2200  
[livro@pimentacultural.com](mailto:livro@pimentacultural.com)  
[www.pimentacultural.com](http://www.pimentacultural.com)



## CONSELHO EDITORIAL CIENTÍFICO

### Doutores e Doutoradas

Adilson Cristiano Habowski  
*Universidade La Salle, Brasil*

Adriana Flávia Neu  
*Universidade Federal de Santa Maria, Brasil*

Adriana Regina Vettorazzi Schmitt  
*Instituto Federal de Santa Catarina, Brasil*

Aguimario Pimentel Silva  
*Instituto Federal de Alagoas, Brasil*

Alaim Passos Bispo  
*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil*

Alaim Souza Neto  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Alessandra Knoll  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Alessandra Regina Müller Germani  
*Universidade Federal de Santa Maria, Brasil*

Aline Corso  
*Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Brasil*

Aline Wendpap Nunes de Siqueira  
*Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil*

Ana Rosângela Colares Lavand  
*Universidade Federal do Pará, Brasil*

André Gobbo  
*Universidade Federal da Paraíba, Brasil*

Andressa Wiebusch  
*Universidade Federal de Santa Maria, Brasil*

Andreza Regina Lopes da Silva  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Angela Maria Farah  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Anísio Batista Pereira  
*Universidade Federal de Uberlândia, Brasil*

Antonio Edson Alves da Silva  
*Universidade Estadual do Ceará, Brasil*

Antonio Henrique Coutelo de Moraes  
*Universidade Federal de Rondonópolis, Brasil*

Arthur Vianna Ferreira  
*Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil*

Ary Albuquerque Cavalcanti Junior  
*Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil*

Asterlindo Bandeira de Oliveira Júnior  
*Universidade Federal da Bahia, Brasil*

Bárbara Amaral da Silva  
*Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil*

Bernadette Beber  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Bruna Carolina de Lima Siqueira dos Santos  
*Universidade do Vale do Itajaí, Brasil*

Bruno Rafael Silva Nogueira Barbosa  
*Universidade Federal da Paraíba, Brasil*

Caio Cesar Portella Santos  
*Instituto Municipal de Ensino Superior  
de São Manuel, Brasil*

Carla Wanessa do Amaral Caffagni  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Carlos Adriano Martins  
*Universidade Cruzeiro do Sul, Brasil*

Carlos Jordan Lapa Alves  
*Universidade Estadual do Norte Fluminense  
Darcy Ribeiro, Brasil*

Caroline Chioquetta Lorenset  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Cássio Michel dos Santos Camargo  
*Universidade Federal do Rio Grande do Sul-Faced, Brasil*

Christiano Martino Otero Avila  
*Universidade Federal de Pelotas, Brasil*

Cláudia Samuel Kessler  
*Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil*

Cristiana Barcelos da Silva  
*Universidade do Estado de Minas Gerais, Brasil*

Cristiane Silva Fontes  
*Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil*

Daniela Susana Segre Guertzenstein  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Daniele Cristine Rodrigues  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Dayse Centurion da Silva  
*Universidade Anhanguera, Brasil*

Dayse Sampaio Lopes Borges  
*Universidade Estadual do Norte Fluminense  
Darcy Ribeiro, Brasil*

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA  
PARA ENGENHARIAS, ARQUITETURA,  
EXPRESSÃO GRÁFICA E DESIGN

Diego Pizarro  
*Instituto Federal de Brasília, Brasil*

Dorama de Miranda Carvalho  
*Escola Superior de Propaganda e Marketing, Brasil*

Edson da Silva  
*Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Brasil*

Elena Maria Mallmann  
*Universidade Federal de Santa Maria, Brasil*

Eleonora das Neves Simões  
*Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil*

Eliane Silva Souza  
*Universidade do Estado da Bahia, Brasil*

Elvira Rodrigues de Santana  
*Universidade Federal da Bahia, Brasil*

Éverly Pegoraro  
*Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil*

Fábio Santos de Andrade  
*Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil*

Fabrcia Lopes Pinheiro  
*Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Brasil*

Felipe Henrique Monteiro Oliveira  
*Universidade Federal da Bahia, Brasil*

Fernando Vieira da Cruz  
*Universidade Estadual de Campinas, Brasil*

Gabriella Eldereti Machado  
*Universidade Federal de Santa Maria, Brasil*

Germano Ehlert Pollnow  
*Universidade Federal de Pelotas, Brasil*

Geymeesson Brito da Silva  
*Universidade Federal de Pernambuco, Brasil*

Giovanna Ofretorio de Oliveira Martin Franchi  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Handherson Leylton Costa Damasceno  
*Universidade Federal da Bahia, Brasil*

Hebert Elias Lobo Sosa  
*Universidad de Los Andes, Venezuela*

Helciclever Barros da Silva Sales  
*Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Brasil*

Helena Azevedo Paulo de Almeida  
*Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil*

Hendy Barbosa Santos  
*Faculdade de Artes do Paraná, Brasil*

Humberto Costa  
*Universidade Federal do Paraná, Brasil*

Igor Alexandre Barcelos Graciano Borges  
*Universidade de Brasília, Brasil*

Inara Antunes Vieira Willerding  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Ivan Farias Barreto  
*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil*

Jaziel Vasconcelos Dorneles  
*Universidade de Coimbra, Portugal*

Jean Carlos Gonçalves  
*Universidade Federal do Paraná, Brasil*

Jocimara Rodrigues de Sousa  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Joelson Alves Onofre  
*Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil*

Jónata Ferreira de Moura  
*Universidade São Francisco, Brasil*

Jorge Eschriqui Vieira Pinto  
*Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil*

Jorge Luís de Oliveira Pinto Filho  
*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil*

Juliana de Oliveira Vicentini  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Julierme Sebastião Morais Souza  
*Universidade Federal de Uberlândia, Brasil*

Junior César Ferreira de Castro  
*Universidade de Brasília, Brasil*

Katia Bruginiski Mulik  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Laionel Vieira da Silva  
*Universidade Federal da Paraíba, Brasil*

Leonardo Pinheiro Mozdzenski  
*Universidade Federal de Pernambuco, Brasil*

Lucila Romano Tragtenberg  
*Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil*

Lucimara Rett  
*Universidade Metodista de São Paulo, Brasil*

Manoel Augusto Polastreli Barbosa  
*Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil*

Marcelo Nicomedes dos Reis Silva Filho  
*Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil*

Marcio Bernardino Sirino  
*Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Brasil*

Marcos Pereira dos Santos  
*Universidad Internacional Iberoamericana del Mexico, México*

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA  
PARA ENGENHARIAS, ARQUITETURA,  
EXPRESSION GRÁFICA E DESIGN

Marcos Uzel Pereira da Silva  
*Universidade Federal da Bahia, Brasil*

Maria Aparecida da Silva Santandel  
*Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil*

Maria Cristina Giorgi  
*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso  
Suckow da Fonseca, Brasil*

Maria Edith Maroca de Avelar  
*Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil*

Marina Bezerra da Silva  
*Instituto Federal do Piauí, Brasil*

Michele Marcelo Silva Bortolai  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Mônica Tavares Orsini  
*Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil*

Nara Oliveira Salles  
*Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil*

Neli Maria Mengalli  
*Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil*

Patrícia Biegging  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Patrícia Flavia Mota  
*Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil*

Raul Inácio Busarello  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Raymundo Carlos Machado Ferreira Filho  
*Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil*

Roberta Rodrigues Ponciano  
*Universidade Federal de Uberlândia, Brasil*

Robson Teles Gomes  
*Universidade Federal da Paraíba, Brasil*

Rodiney Marcelo Braga dos Santos  
*Universidade Federal de Roraima, Brasil*

Rodrigo Amancio de Assis  
*Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil*

Rodrigo Sarruge Molina  
*Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil*

Rogério Rauber  
*Universidade Estadual Paulista Júlio  
de Mesquita Filho, Brasil*

Rosane de Fatima Antunes Obregon  
*Universidade Federal do Maranhão, Brasil*

Samuel André Pompeo  
*Universidade Estadual Paulista Júlio  
de Mesquita Filho, Brasil*

Sebastião Silva Soares  
*Universidade Federal do Tocantins, Brasil*

Silmar José Spinardi Franchi  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Simone Alves de Carvalho  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Simoni Urnau Bonfiglio  
*Universidade Federal da Paraíba, Brasil*

Stela Maris Vaucher Farias  
*Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil*

Tadeu João Ribeiro Baptista  
*Universidade Federal do Rio Grande do Norte*

Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno  
*Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil*

Taíza da Silva Gama  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Tania Micheline Miorando  
*Universidade Federal de Santa Maria, Brasil*

Tarcísio Vanzin  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Tascieli Feltrin  
*Universidade Federal de Santa Maria, Brasil*

Tayson Ribeiro Teles  
*Universidade Federal do Acre, Brasil*

Thiago Barbosa Soares  
*Universidade Federal de São Carlos, Brasil*

Thiago Camargo Iwamoto  
*Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Brasil*

Thiago Medeiros Barros  
*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil*

Tiago Mendes de Oliveira  
*Centro Federal de Educação Tecnológica  
de Minas Gerais, Brasil*

Vanessa Elisabete Raue Rodrigues  
*Universidade Estadual de Ponta Grossa, Brasil*

Vania Ribas Ulbricht  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

Wellington Furtado Ramos  
*Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil*

Wellton da Silva de Fatima  
*Instituto Federal de Alagoas, Brasil*

Yan Masetto Nicolai  
*Universidade Federal de São Carlos, Brasil*

## PARECERISTAS E REVISORES(AS) POR PARES

### Avaliadores e avaliadoras Ad-Hoc

Alessandra Figueiró Thornton  
*Universidade Luterana do Brasil, Brasil*

Alexandre João Appio  
*Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Brasil*

Bianka de Abreu Severo  
*Universidade Federal de Santa Maria, Brasil*

Carlos Eduardo Damian Leite  
*Universidade de São Paulo, Brasil*

Catarina Prestes de Carvalho  
*Instituto Federal Sul-Rio-Grandense, Brasil*

Elisiene Borges Leal  
*Universidade Federal do Piauí, Brasil*

Elizabete de Paula Pacheco  
*Universidade Federal de Uberlândia, Brasil*

Elton Simomukay  
*Universidade Estadual de Ponta Grossa, Brasil*

Francisco Geová Goveia Silva Júnior  
*Universidade Potiguar, Brasil*

Indiamaris Pereira  
*Universidade do Vale do Itajaí, Brasil*

Jacqueline de Castro Rimá  
*Universidade Federal da Paraíba, Brasil*

Lucimar Romeu Fernandes  
*Instituto Politécnico de Bragança, Brasil*

Marcos de Souza Machado  
*Universidade Federal da Bahia, Brasil*

Michele de Oliveira Sampaio  
*Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil*

Pedro Augusto Paula do Carmo  
*Universidade Paulista, Brasil*

Samara Castro da Silva  
*Universidade de Caxias do Sul, Brasil*

Thais Karina Souza do Nascimento  
*Instituto de Ciências das Artes, Brasil*

Viviane Gil da Silva Oliveira  
*Universidade Federal do Amazonas, Brasil*

Weyber Rodrigues de Souza  
*Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Brasil*

William Roslindo Paranhos  
*Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil*

## PARECER E REVISÃO POR PARES

Os textos que compõem esta obra foram submetidos para avaliação do Conselho Editorial da Pimenta Cultural, bem como revisados por pares, sendo indicados para a publicação.

## SUMÁRIO

**Apresentação e agradecimentos ..... 12**

**Prefácio ..... 14**

Capítulo 1

**Noções básicas sobre representações gráfica ..... 18**

1.1 Elementos básicos da representação gráfica ..... 19

1.2 Representações gráficas para desenho técnico:  
sistemas de representação ..... 24

1.3 Sistema de projeção ..... 29

1.4 Ortoedro de referência ..... 31

1.5 Tipos de projeção ..... 34

1.5.1 Projeção cônica ..... 36

1.5.2 Projeção cilíndrica ..... 39

1.6 Aplicabilidade da perspectiva cilíndrica ..... 42

Capítulo 2

**Cavaleira:  
projeção cilíndrica oblíqua ..... 46**

2.1 Caracterização da Cavaleira ..... 47

2.2 Observador, objeto e planos de projeção ..... 48

2.3 Eixos coordenados ..... 49

2.3.1 Posicionamento das faces ..... 50

2.4 O eixo y ..... 52

2.5 Parâmetros da Cavaleira ..... 54

2.5.1 Direção da Cavaleira ( $\alpha$ ) ..... 55

2.5.2 Fator de deformação K ..... 57

2.6 Rotação da peça .....	59
2.6.1 Diferença entre rotação e variação da direção da projeção do eixo Y .....	60
2.6.2 Diferença entre faces e vistas.....	61
2.7 Trabalhando com arestas que não estão paralelas aos eixos coordenados .....	62
2.8 Cilindros e cones.....	64
2.8.1 Cilindros .....	67
2.8.2 Cones.....	69
2.8.3 A representação da elipse .....	70

### Capítulo 3

#### **Isometria:**

<b>projeção cilíndrica ortogonal .....</b>	<b>79</b>
3.1 Caracterização da axonometria .....	80
3.2 Observador, objeto e planos de projeção.....	82
3.3 Caracterização da isometria .....	83
3.4 Isometria simplificada .....	84
3.5 Eixos coordenados e ortoedro de referência .....	86
3.5.1 Visualização de todas as faces.....	87
3.5.2 Rotação da peça .....	89
3.6 Cilindros e cones.....	90
3.6.1 Representação da elipse e da oval regular de quatro centros .....	92
3.7 Furo cilíndrico .....	100

Capítulo 4

**Sistema de Vistas:**

<b>projeção cilíndrica ortogonal .....</b>	<b>103</b>
4.1 Introdução .....	104
4.2 Caracterização do sistema de vistas mongeanas.....	106
4.3. Observador, objeto e planos de projeção.....	111
4.3.1 Primeiro e terceiro diedros .....	112
4.3.2 Segundo e quarto diedros.....	113
4.3.3 Sistemas alemão e americano.....	115
4.4 As seis vistas .....	116
4.5 Os eixos coordenados .....	122
4.6 Visualizações das vistas e da peça .....	123
4.7 A escolha das vistas .....	126
4.8 Representações das vistas de objetos .....	128
4.8.1 Passando das vistas para a Cavaleira e Isometria Simplificada.....	132
4.9 Sólidos básicos: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.....	134
4.9.1 Prisma .....	134
4.9.2 Pirâmides.....	138
4.9.3 Geratrizes de limites de visibilidade nos cilindros e cones .....	140
4.9.4 Cilindros .....	147
4.9.5 Cones.....	151
4.9.6. Esferas .....	154
4.9.7 Partes da esfera.....	159
4.9.7.1 Meias esferas .....	160
4.9.7.2 Quartos de esfera .....	162
4.9.7.3 Oitavos de esfera .....	163

Capítulo 5

<b>Verdadeira Grandeza .....</b>	<b>164</b>
5.1 Definições e usos .....	165
5.1.1 Compreendendo a relação entre as três posições básicas dos elementos geométricos e a visualização da VG .....	166
5.2 Sistema de vistas mongeanas e plano auxiliar .....	169
5.3 Mudança de plano.....	171
<b>5.3.1 Caso 1 .....</b>	<b>172</b>
5.3.2 Caso 2.....	176
5.3.3 Caso 3.....	182

Capítulo 6

<b>Seção Plana .....</b>	<b>188</b>
6.1 Introdução aos conceitos de seção plana e de interseção .....	189
6.1.1 Superfície e sólido .....	189
6.1.2. Interseção e seção.....	193
6.2. Seção plana de sólidos geométricos .....	196
6.2.1 Seção plana de prismas .....	196
6.2.2 Seção plana de pirâmides .....	201
6.2.3 Seção plana de cilindros.....	207
6.2.4 Seção plana de cones .....	215
<b>Referências.....</b>	<b>230</b>
<b>Índice remissivo.....</b>	<b>231</b>

## APRESENTAÇÃO E AGRADECIMENTOS

Este é um livro introdutório e foi desenvolvido especialmente para os estudantes do Ensino Técnico e Superior que necessitam trabalhar com Geometria Gráfica aplicada às Representações Gráficas nas áreas de arquitetura, engenharias, expressão gráfica e design. Seu conteúdo estabelece bases para se trabalhar com o que se entende mais amplamente como “Desenho Técnico”, mas pode ser utilizado por qualquer pessoa que queira estudar Geometria Gráfica.

A elaboração desta obra surgiu da necessidade de registrar soluções teórico-metodológicas encontradas em sala de aula e discussões realizadas periodicamente pela equipe de professores que ministra a disciplina de Geometria Gráfica Tridimensional, no Ciclo Básico dos Cursos de Engenharias da Universidade Federal de Pernambuco.

O livro aborda três tipos de Projeções Cilíndricas bastante utilizadas em disciplinas de “Desenho Técnico”, são elas: Cavaleira, Isometria (Simplificada) e Sistema de Vistas, essa última também conhecida como Sistema Mongeano ou Sistema de Vistas Ortográficas. Além disso, o livro aborda temas como Vistas Auxiliares, Verdadeira Grandeza e o estudo da Seção Plana nos sólidos básicos.

Esta obra está dividida em seis capítulos. O primeiro capítulo é introdutório e aborda noções básicas sobre representação gráfica, projeção e perspectiva. O segundo capítulo trata da Projeção Cilíndrica Cavaleira. O terceiro capítulo aborda a Isometria Simplificada, que é uma simplificação da Projeção Cilíndrica Isométrica. O quarto capítulo tem como tema o Sistema de Vistas. Finalmente, o quinto e sexto capítulos tratam dos estudos de Verdadeira Grandeza e Seção Plana, respectivamente.

s u m á r i o

As autoras são pesquisadoras do Laboratório de Estudos em Tecnologias de Representação Gráfica – LABGRAF/CAC/UFPE que tem como principal objetivo a pesquisa e a difusão da investigação da Geometria Gráfica para aqueles que buscam o aprofundamento dos conhecimentos necessários à sua aplicação por meio de novas tecnologias.

Agradecemos o apoio financeiro do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC/UFPE e à Universidade Federal de Pernambuco. Agradecemos também a todos os professores que de alguma forma participaram da elaboração desse trabalho, o qual tem como objetivo principal compartilhar e disseminar o conhecimento de Geometria Gráfica na área da Ciência Visiográfica.

Atenciosamente,

*Andiara Lopes e Mariana Gusmão*

sumário

## PREFÁCIO

Profissionais da engenharia, da arquitetura, do design, da expressão gráfica utilizam os sistemas de representação para expressarem suas ideias e concepções de projetos dos mais variados perfis de aplicação no mundo que nos cerca. Os conteúdos referentes a tais sistemas são ministrados nos cursos superiores oferecidos pelas instituições de ensino deste nível e por vezes são manifestas as dificuldades enfrentadas para a sua aprendizagem, não obstante, a sua importância.

Encontramos trabalhos que reforçam a importância da linguagem gráfica para a comunicação e desenvolvimento de ideias, tal como o de Bonafe e Nicasio (2017, p.77)<sup>1</sup>

Para poder desarrollar su creatividad o su pensamiento creativo, el alumno necesita dibujar y poder expresarse, es decir poder representar para él y para mostrar a otros sus ideas de manera comprensible. Para poder expresar y comunicarse gráficamente necesita de un lenguaje común, los Sistemas de Representación. El aprendizaje de los Sistemas de Representación es el primer paso que le permite representar objetos existentes e imaginarios de manera bidimensional y tridimensional.

No estudo dos sistemas de representação, conceitos básicos precisam ser apresentados aos estudantes que, em sua maioria, não foram introduzidos ao manuseio de instrumentos de traçados geométricos, nem ao estudo das projeções que possibilitam a representação dos objetos. Assim, conceitos geométricos, suas propriedades e a geometria descritiva – que está no cerne de todo o traçado dos sistemas de representação – são de vital importância

## sumário

- 1 BONAFAE, Silvana; NICASIO, Cristina. *ENSEÑANZA COOPERATIVA DE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN*. In Actas del XIV CONGRESO NACIONAL DE PROFESORES DE EXPRESIÓN GRÁFICA EN INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y CARRERAS AFINES - Representando ideas, generando soluciones: XIV Congreso Nacional de Profesores de Expresión Gráfica en Ingeniería, Arquitectura y Carreras Afines. Laurentino, Auta L; Lucero, Hernán (coordinación general); Martínez, Gonzalo; Bombassei, Elisa. 1a ed. Río Cuarto: UniRío Editora, 2017, p.77-80. Libro digital- ISBN 978-987-688-244-6.

para tais profissionais no seu processo de formação e “... para abordar la comprensión de los sistemas de representación es necesario estudiar conceptos referidos a la geometría descriptiva acompañados del desarrollo práctico.” (FULLER, GORDILLO STEMBERGER e ZAPATA, 2019, p.161<sup>2</sup>).

Os traçados exercitados em sala de aula na resolução dos exercícios de representação dos objetos nos sistemas de representação fornecem ao alunado a prática da teoria exposta pelos docentes, através dos meios mais adequados selecionados por eles, com a finalidade de realizar o processo ensino/aprendizagem com eficiência.

Neste sentido, para que os conhecimentos sejam elaborados, compreendidos, reelaborados e aproveitados pelo aluno, a metodologia de ensino e os recursos adotados pelo professor em sala de aula são sempre o fator diferencial que certamente agrega benefícios à aprendizagem (GALVÃO et al, 2015<sup>3</sup>).

Durante a leitura deste material e o estudo dos conteúdos abordados aqui, questões teóricas que respaldam toda a atividade de representação gráfica são discutidas e ilustradas com a finalidade de apresentar o conceito de “projetar” e, conseqüentemente, os tipos de sistemas originários do ato de “projetar” por meio de seus casos particulares ou específicos.

A caminhada para a aprendizagem dos conteúdos e da prática dos sistemas de representação se apresenta com fases diferenciadas e escalonadas, de forma processual, como o desenvolvimento de toda a atividade humana e para isso:

- 2 PFULLER, Nora Alicia; GORDILLO STEMBERGER, Gabriela Julieta; ZAPATA, Sandra Lilian. *CROQUIS COMO MÉTODO DE APROXIMACIÓN A LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACION* in Actas de trabajos extensos del XVI Congreso Nacional de profesores de expresión gráfica en ingeniería, arquitectura y carreras afines: la representación gráfica de naturaleza técnica. Salgueiro, Walter (organizador); Bairo, Susana; Arce, Marcelo. 1a ed. - Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2019, p.159-163. Libro digital - ISBN 978-950-658-498-6.
- 3 GALVÃO, T. F.; ADAUTO, T. E. R.; BARRETO, H. T. A. N.; SILVA, E. C. R. da; MACHADO, G. B. B. N.; RIBEIRO, J. V. O. *Geometria gráfica no exame nacional do ensino médio brasileiro* In XII congreso nacional de profesores de expresión gráfica en ingeniería, arquitectura y áreas afines, EGRAFIA 2015, Río Cuarto, Córdoba, Argentina, 2015.

El dominio del lenguaje gráfico comienza con comprender y comunicar la problemática espacial, dado que el aprendizaje de los distintos sistemas gráficos abarca los aspectos normativos que permiten operar la codificación del dibujo requiriendo avanzar luego en explicaciones teóricas y verificaciones prácticas de las leyes y principios que dan cuenta de los distintos sistemas en Arquitectura, utilizando las justificaciones posibles desde la Geometría Descriptiva y apelando al conocimiento de los fundamentos teóricos a través de los diferentes caminos gráficos analógicos y digitales. (ULACIA e GARCIA VOGLIOLO, 2019 p. 193<sup>4</sup>).

Neste livro, as autoras apresentam nas ilustrações o processo de traçados, mostrando aos estudantes, não só uma sequência, mas também o raciocínio implícito neles e, por conseguinte, propiciam uma aprendizagem que parte do entendimento e não da memorização de uma sequência mecânica de passos a serem processados. Destaque-se a defesa do caráter processual que já mencionamos:

Um outro aspecto particular da produção de representações gráficas durante o aprendizado de GD – **também dos Sistemas de Representação, acréscimo nosso**- refere-se à importância de seu caráter processual. Segundo Santos (1999), uma das grandes dificuldades de aprendizado da GD está associada à perda do sequenciamento das construções geométricas, pois a ordem das operações realizadas não fica explicitamente representada quando o aluno observa a forma final de um exercício resolvido. Principalmente exercícios complexos, após sua resolução, podem resultar num grande número de linhas e pontos, tornando difícil a compreensão do procedimento realizado (Pece et al, 2009, p.04<sup>5</sup>).

Ao deparar-se com traçados que mostram uma sequência de ações, os estudantes têm a oportunidade de reviver os exercícios práticos resolvidos na lousa, digital ou analógica, em sala de aula por seus professores,

## sumário

- 4 ULACIA, Andrea M.; GARCIA VOGLIOLO, Matías. *ENSEÑAR A PENSAR “LO DIBUJADO”* In Actas de trabajos extensos del XVI Congreso Nacional de profesores de expresión gráfica en ingeniería, arquitectura y carreras afines: la representación gráfica de naturaleza técnica. Salgueiro, Walter (organizador); Bairo, Susana; Arce, Marcelo. 1ª ed. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2019, p.190-195. Libro digital - ISBN 978-950-658-498-6.
- 5 Pece, Carlo Alessandro Zanetti; Padovani, Stephania; Mafioletti, Diego; Galeb, Anna Carolina Murata; Paranhos, Pedro Serigheli da Rocha. *Desenvolvimento de material didático instrucional para Geometria Descritiva: uma experiência de design participativo* in ID, v.6, nº1, 14/01/2009.

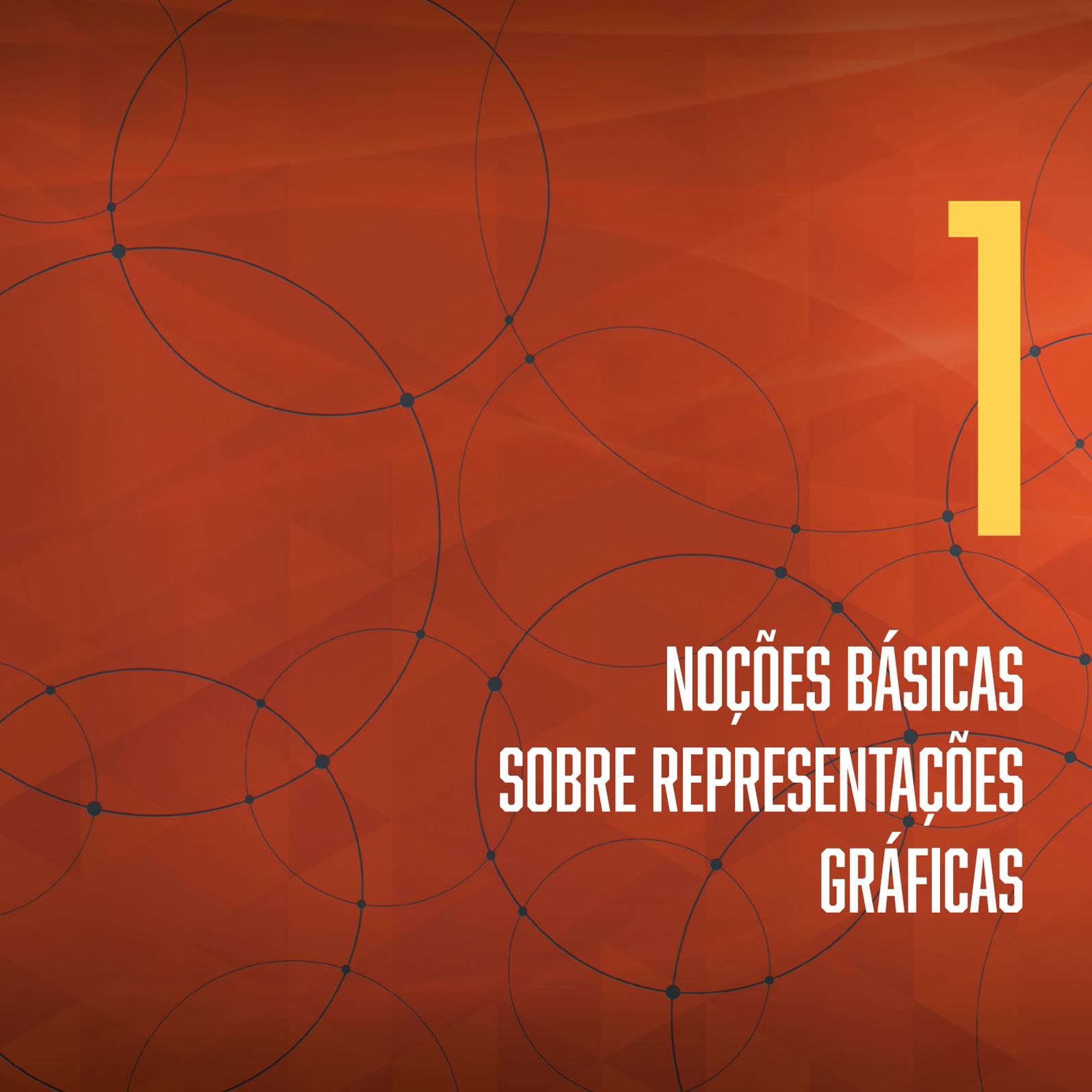
durante o processo de ensino/aprendizagem. Tal oportunidade promove a sedimentação do processo de desenhar ou expressar-se graficamente.

O leitor desta obra encontra em suas páginas aspectos teóricos e traçados expostos pelas autoras fundamentados em pesquisa e discussão sobre os temas abordados com cuidado, clareza, aplicabilidade na vida profissional e acadêmica, além de ilustrações que comunicam junto à teoria, as informações e conhecimentos primordiais para os profissionais das engenharias, da arquitetura, do design e da expressão gráfica.

*Professora Doutora Sandra de Souza Melo*

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

sumário



1

**NOÇÕES BÁSICAS  
SOBRE REPRESENTAÇÕES  
GRÁFICAS**

## 1.1 ELEMENTOS BÁSICOS DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

A Geometria Gráfica possui três elementos básicos por meio dos quais é possível representar as formas, são eles: o ponto, a linha e a superfície. Esses elementos são conceitos ou ideias, portanto são abstratos, porém quando se faz a representação de um ponto, de uma linha ou de uma superfície os mesmos deixam de ser conceitos e passam a ser representações gráficas.

De acordo com Chaput (1954) as noções de ponto, linha e superfície podem ser concebidas a partir de um objeto, ou sólido geométrico. Isso ocorre na medida em que se considera que os vértices deste sólido são pontos; as arestas são linhas e as faces são superfícies. Sendo assim, noções tão abstratas ganham concretude e uma vez compreendidas é possível torná-las independentes do próprio objeto.

As noções de superfície, de linha e de ponto, uma vez adquiridas pela consideração do corpo, podem em seguida ser concebidas independentemente do corpo, das superfícies e das linhas, de que constituem os limites. É assim que se chega a considerar inversamente uma linha como gerada por um ponto que se move no espaço; uma superfície como gerada por uma linha que se desloca, e um corpo como gerado por uma superfície que se desloca no espaço (CHAPUT, 1954, p. 2).

Portanto,

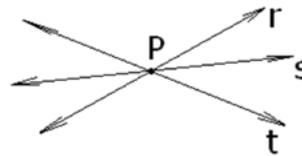
Em uma linha, há uma infinidade de pontos; em uma superfície uma infinidade de linhas; e em um corpo uma infinidade de superfícies e o número que resulta da medida de uma linha chama-se comprimento; de uma superfície, área; de um corpo, volume (CHAPUT, 1954, p. 2).

s u m á r i o

Diante do raciocínio de Chaput, este livro considera as seguintes noções sobre os elementos básicos da Representação Gráfica:

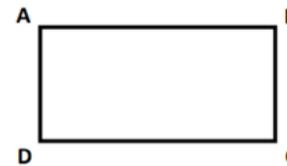
1. **O ponto:** é o elemento mais básico e fundamental da Geometria Gráfica. Ele indica uma posição, não possui formato ou dimensão. É também o lugar da intersecção de duas ou mais linhas (figura 1.1). O ponto marca o início e o fim de um segmento de reta (figura 1.2). É representado por uma letra maiúscula do alfabeto latino, como por exemplo, A, B e P da figura 1.3

Figura 1.1 - Ponto



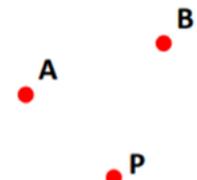
Fonte: Autoras.

Figura 1.2 - Pontos delimitando segmentos de reta



Fonte: Autoras.

Figura 1.3 - Nomeação de pontos



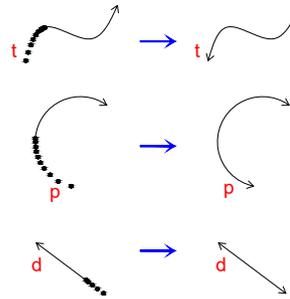
Fonte: Autoras.

2. **A linha:** à medida em que o ponto se move, a sua trajetória descreve uma linha; assim, a linha é o enfileiramento de pontos unidos, como ilustra a figura 1.4. A linha possui apenas uma dimensão (comprimento), posição e direção. Porém, a posição e a direção são sempre relativas a um referencial, conforme será visto. A linha define os limites de uma superfície e é representada por uma letra minúscula do alfabeto latino (ver figura 1.5).

A reta é um caso particular de linha, gerada pelo deslocamento do ponto em uma única direção. Portanto, dois pontos são suficientes para

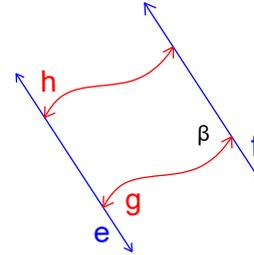
determinar uma reta. Existe também a semi-reta, na qual existe um ponto de início e o outro extremo se prolonga infinitamente; e os segmentos de reta, que possuem ponto de início e ponto de fim, ou seja, é um trecho de reta delimitado por pontos (ver figura 1.6).

Figura 1.4 - Linhas



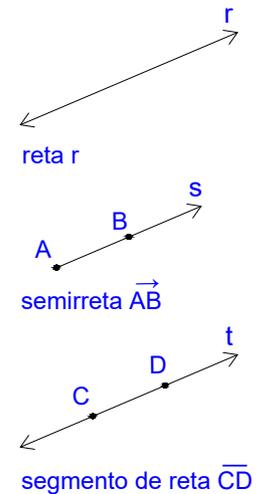
Fonte: Autoras.

Figura 1.5 - Superfície



Fonte: Autoras.

Figura 1.6 - Reta, semirreta e segmento de reta



Fonte: Autoras.

Para a Geometria as linhas não apresentam classificação. No entanto, no caso particular dos sistemas de representação e das normas técnicas, especificadas e padronizadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), as linhas podem ser classificadas de acordo com tipo, denominação e aplicação. Neste livro, serão utilizados apenas alguns tipos de linhas classificadas pela ABNT, ilustrados no quadro 1.1.

Quadro 1.1 - Tipo, denominação e aplicação de linhas

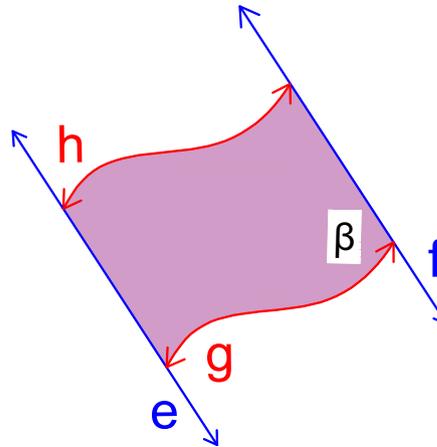
TIPO	DENOMINAÇÃO	APLICAÇÃO	
		CAVALEIRA E ISOMETRIA SIMPLIFICADA	SISTEMA DE VISTAS
	Contínua larga	Representar as arestas visíveis	Representar as arestas visíveis
	Contínua estreita	Representar o Ortoedro de Referência e as linhas auxiliares, construtivas gerais e arestas não visíveis	Representar as linhas de chamada (projeção das projetantes)
	Tracejada larga	-	Representar as arestas não visíveis
	Contínua mais larga*	-	Representar as linhas de terra (encontro dos planos de projeção)

(\*) Esse tipo de linha não é contemplado pela ABNT.

Fonte: Autoras, adaptado da NBR 6492 (ABNT, 2021).

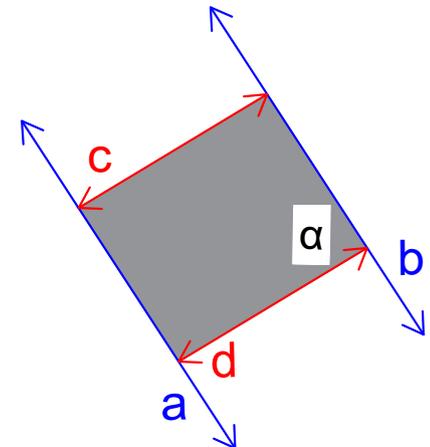
3. **A superfície:** é o resultado do deslocamento de uma linha, desde que não seja na sua direção intrínseca (ver figura 1.7). A superfície define os limites de um volume. O Plano é um caso particular de superfície, gerado pelo deslocamento da linha em uma única direção, conforme a figura 1.8. Os planos possuem apenas duas dimensões. Porém, a posição e a direção dos mesmos são sempre relativas a um referencial. A nomenclatura das superfícies é dada por uma letra do alfabeto grego ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\pi$ ,  $\phi$ ).

Figura 1.7 - Superfície qualquer



Fonte: Autoras.

Figura 1.8 - Superfície plana

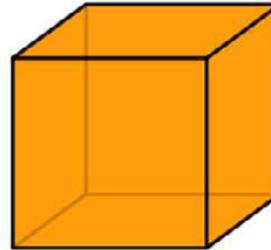


Fonte: Autoras.

Embora o volume geométrico não seja considerado um elemento básico assim como o ponto, a linha e a superfície, ele pode ser construído a partir destes. Consequentemente, tal volume tem uma posição no espaço e possui três dimensões: largura, altura e profundidade.

A figura 1.9 mostra um exemplo de volume geométrico, um cubo, que é constituído de faces planas (superfícies), arestas (segmentos de reta) e vértices (pontos). A figura 1.10 mostra um outro exemplo de volume geométrico, uma esfera, que pode ser constituída por uma única superfície curva ou por pontos equidistantes de um outro ponto, chamado de centro.

Figura 1.9 - Exemplo de  
volume geométrico



Fonte: Autoras.

Figura 1.10 - Esfera



Fonte: bravebug- Openclipart, 2022<sup>1</sup>.

## 1.2 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA DESENHO TÉCNICO: SISTEMAS DE REPRESENTAÇÃO

De maneira geral, a representação gráfica é uma forma de linguagem, a linguagem gráfica, que serve para comunicar ideias sobre a Forma em geral. Em outras palavras, um interlocutor a utiliza para representar uma ideia sobre uma Forma qualquer e, assim, transmiti-la para um outro interlocutor. As representações gráficas podem ter funções variadas, entre elas as funções artística e técnica.

Uma representação gráfica artística é uma escolha do artista, que não tem, necessariamente, compromisso com a representação do que é real. Portanto, sua representação é livre e é feita de acordo com a interpretação do real no contexto da visão de mundo do artista. Nesse caso, cada artista possui uma linguagem própria, única, como mostra a figura 1.11.

sumário

1 Disponível em: <https://publicdomainvectors.org/en/free-clipart/Metal-sphere/49462.html>. Acesso em: 16 jul. 2022.

Nas áreas nas quais existe a necessidade de se criar e/ou modificar as formas de um objeto, como engenharias, arquitetura, design, expressão gráfica, é utilizada uma outra forma de representação, a representação gráfica técnica, também conhecida como Desenho Técnico.

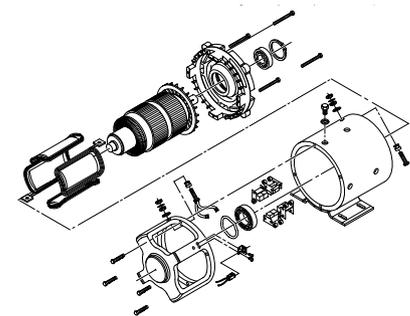
Diferentemente do desenho artístico, o desenho técnico tem, necessariamente, compromisso com a representação do que é real. Isso pode ser garantido por meio de duas características: a universalidade e a precisão. Essas duas características possibilitam a comunicação entre as partes envolvidas no processo de produção de um objeto através de uma linguagem gráfica (figura 1.12).

Figura 1.11 - Tela Violet (1923) de Kandinsky



Fonte: The Metropolitan Museum of Art - Rawpixel, 2022<sup>2</sup>.

Figura 1.12 - Peça de maquinário em perspectiva isométrica



Fonte: Clker-Free-Vector-Images – Pixabay, 2022<sup>3</sup>.

sumário

Para realizar uma representação gráfica técnica é importante perceber que todos os objetos que estão à nossa volta possuem três dimensões: largura, altura e profundidade. Uma representação gráfica adquire uma função

- 2 Disponível em: <https://www.rawpixel.com/image/2968512>. Acesso em: 16 jul. 2022.
- 3 Disponível em: <https://pixabay.com/images/id-29887/>. Acesso em: 16 jul. 2022.

técnica quando é necessário representar dimensões e características de um objeto de acordo com as necessidades de um projeto.

Segundo Silva (1998), o processo de desenvolvimento de um projeto é composto por três fases: (1) os estudos preliminares, que incluem a análise do problema e a concepção da solução; (2) o anteprojeto, que consiste na representação da solução geral para o problema; e (3) o projeto definitivo, que consiste na representação com fins de execução do mesmo. Em todas as fases há a necessidade da representação gráfica, o que muda é o nível de precisão e a quantidade de informações contidas nas representações.

Em suma, para que as ideias sejam compreendidas e executadas pelos profissionais envolvidos neste processo, elas precisam ser representadas graficamente (projeto). Por esse motivo a compreensão e o domínio da linguagem gráfica, que é utilizada nos projetos, se tornam essenciais na formação dos profissionais dessas áreas.

Portanto, a representação gráfica para o Desenho Técnico, não pode ser feita de maneira aleatória, ela deve obedecer a padrões, procedimentos e normas específicas para garantir a universalidade da linguagem. Nesse contexto, o desenho técnico cumpre sua função de linguagem gráfica, que é a de estabelecer a comunicação entre as partes envolvidas no processo.

Os elementos de um Sistema Projetivo (observador, objeto, plano de projeção, etc) podem ser organizados em posições variadas. Um Sistema de Representação é caracterizado quando esses elementos adquirem posições específicas pré-determinadas. A projeção de um objeto dentro de um Sistema de Representação é uma imagem, a partir dela é possível extrair propriedades fundamentais de um objeto, como suas grandezas lineares e angulares. Assim, os sistemas de representação são utilizados por profissionais que trabalham com o Desenho Técnico. Tanto quem representa como quem lê a representação gráfica sabe em qual sistema de representação o objeto foi representado e, portanto, sabe retirar/interpretar da própria representação as informações necessárias para a execução do objeto.

Vale salientar que na literatura a definição de “Sistema de Representação” não possui consenso. Além disso, muitas vezes os termos “imagem”, “representação” e “projeção” são utilizados como sinônimos. Costa e Costa (1996) afirmam que a principal finalidade de um Sistema de Representação é: “Representar a FORMA de objetos de 3 dimensões em um desenho plano, onde apenas duas dimensões são utilizáveis” (COSTA; COSTA, 1996, p. 14). Com relação à representação em um sistema de representação autores afirmam que:

Esta REPRESENTAÇÃO não pode se restringir a uma simples imagem visual do objeto, como fornece uma fotografia ou uma pintura. É indispensável que, através da representação, apenas, todas as propriedades geométricas do objeto no espaço possam ser obtidas, qualitativa e quantitativamente (COSTA; COSTA, 1996, p. 14).

Além disso, de acordo com Costa e Costa (1996), para que uma representação qualquer de um objeto se constitua em um sistema de representação é necessário que haja mais de uma projeção/imagem/representação deste objeto e que elas estejam inter-relacionadas.

Em contrapartida, Melo (2020) defende que um sistema de representação pode se constituir de uma única projeção desde que essa projeção tenha sido gerada a partir de um sistema projetivo.

Todas as operações que realizamos para efetuar uma vista ortogonal ou uma projeção cônica, são na realidade operações projetivas. As referidas operações são *projetar* e *cortar*, e elas garantem a relação entre vistas, ou ainda, entre imagens e objetos relacionados entre si projetivamente, [...]. Nesta relação projetiva todos os elementos, [...] continuam existindo, ainda que não sejam nominadas ou explicitamente expressas em cada Sistema de Representação (MELO, 2020, p. 72).

Neste livro optou-se por considerar tanto a definição de Costa e Costa (1996), que destaca a necessidade da utilização de mais de uma projeção, quanto a definição de Melo (2020) que trata da relação projetiva entre objeto e imagem dentro de um sistema projetivo. Para isso será considerada a figura do Ortoedro de Referência (OR) (ver item 1.4 deste capítulo para saber o que é o OR e suas características). O OR funcionará tanto como

uma projeção adicional – no sentido defendido por Costa e Costa (1996) – na medida em que com ele é possível saber que vistas estão presentes na representação; quanto como um elemento auxiliar na interpretação do ponto de vista de sistema projetivo – no sentido apresentado por Melo (2020) – já que com o OR é possível saber qual o sistema projetivo está sendo utilizado e localizar os eixos coordenados. Dessa forma, o OR compõe juntamente com a representação do objeto, um sistema de representação.

O objetivo deste livro é trabalhar a representação de volumes, enquanto objetos tridimensionais. Para isso serão abordados os principais sistemas de representação que dão base ao Desenho Técnico<sup>4</sup> que compõem os projetos em áreas como engenharia, arquitetura e design. Contudo, é importante frisar que esse livro tem um caráter introdutório na medida em que o objeto a ser representado é um sólido geométrico e será trabalhado do mesmo ponto de vista da Geometria. Isso significa dizer que apenas sua Forma será considerada. Além disso, sua representação se dará através da utilização dos sistemas de representação:

um objeto possui FORMA, FUNÇÃO e CONSTITUIÇÃO MATERIAL. A Geometria estuda apenas a FORMA do objeto, desvinculada dos outros dois fatores. Sob esse ponto de vista, o objeto é um Sólido Geométrico (COSTA, COSTA, 1996, p.13).

As possibilidades de posicionamento de um objeto dentro de um sistema projetivo são inúmeras. Dentro da representação gráfica elas podem ser classificadas em tipos, de acordo com dois critérios: tipo de projeção (cônica ou cilíndrica, tendo esta última dois subtipos: ortogonal e oblíqua) e posição do objeto com relação ao plano de projeção (o que na prática veremos como a posição do Ortoedro de Referência).

Algumas posições específicas foram escolhidas e passaram a ser conhecidas e reconhecidas dentro das necessidades da representação gráfica,

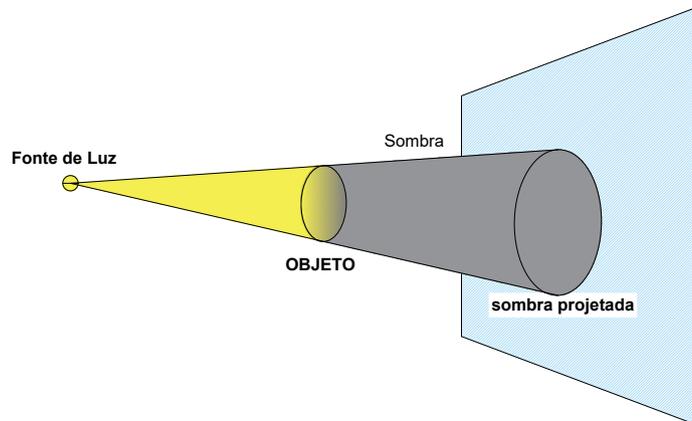
4 A ABNT NBR 6492, cujo título é “Documentação técnica para projetos arquitetônicos e urbanísticos — Requisitos”, foi atualizada em 2021 e substituiu o termo desenho técnico por documentação técnica.

entre elas estão: a Cavaleira; a Isometria (neste livro será trabalhado um caso particular da mesma, a Isometria Simplificada); e o Sistema de Vistas Mongeanas (este possui diversos nomes dependendo do material consultado, neste livro denominaremos Sistema de Vistas, nome mais comumente encontrado na literatura).

### 1.3 SISTEMA DE PROJEÇÃO

As representações são o resultado de um processo, o processo projetivo que tem em seu arcabouço um Sistema de Projeção, ou Sistema Projetivo. Para entender como funciona um sistema de projeção o exemplo mais comumente utilizado é o da sombra.

Figura 1.13 - Sistema de projeção da sombra



Fonte: Autoras.

Na figura 1.13, a fonte de luz emite raios luminosos que iluminam o objeto e a parede atrás do objeto. Como os raios que iluminam a parede sofrem uma interrupção ao chegar ao objeto, cria-se uma sombra na parede.

A sombra funciona como uma imagem do objeto que é projetada na superfície bidimensional da parede.

Um sistema de projeção funciona de forma semelhante. Para representar um objeto é necessário primeiramente projetá-lo. A ação de projetar se dá por meio de um Sistema de Projeção. Nesse sentido a projeção é uma representação e é por essa razão que muitas vezes os termos representação e projeção aparecem como sinônimos.

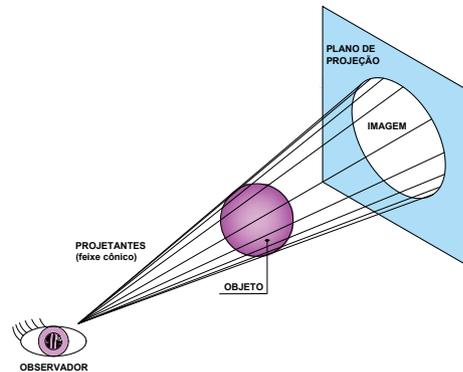
O processo de projeção envolve muitos elementos, ou variáveis, entre eles os principais são: observador, projetantes, objeto, plano de projeção e imagem.

- Observador (centro de projeção);
- Projetantes (raios visuais que partem do centro de projeção);
- Objeto (a ser representado, pode ser concreto ou imaginado);
- Plano de Projeção (no qual será representada a imagem do objeto, é também o referencial escolhido neste livro para descrever as posições dos outros elementos);
- Imagem (representação do objeto). A imagem é o objetivo principal, é o que se busca, é o que aparece. Usualmente os materiais disponíveis sobre Desenho Técnico carecem de explicações sobre o Sistema Projetivo. Tais materiais explicam esse conteúdo a partir da imagem, deixando de explicar como a imagem foi gerada. Compreender o processo projetivo e suas possibilidades nos dá uma visão global dos Sistemas de Projeção, sobretudo de como todos estes estão interligados, pois o que os diferencia é apenas a modificação da posição dos elementos que os compõem.

Sendo assim, o processo de projeção funciona como uma “cena” na qual o observador visualiza o objeto. Para que o objeto seja percebido,

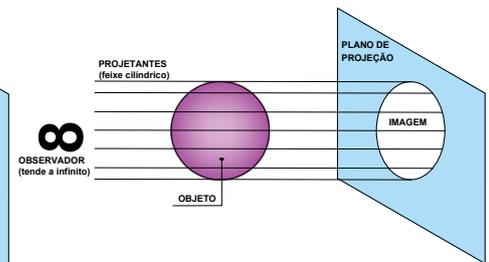
partem dos olhos do observador raios visuais, ou projetantes, que conectam os olhos do observador ao objeto em sua totalidade, projetando o objeto no plano de projeção, como mostram as figuras 1.14 e 1.15. Os pontos, onde as projetantes tocam o plano de projeção definem a representação da projeção do objeto, que, nesse caso, consiste em uma imagem bidimensional proporcional ao objeto tridimensional.

**Figura 1.14 - Relação projetiva em um sistema cônico**



Fonte: Autoras.

**Figura 1.15 - Relação projetiva em um sistema cilíndrico**



Fonte: Autoras.

## 1.4 ORTOEDRO DE REFERÊNCIA

A utilização do Ortoedro de Referência (OR) é uma técnica muito útil quando se trabalha com representações em geral. Ela consiste em imaginar o objeto que se quer representar dentro de uma caixa, com características específicas, como será visto mais adiante. Essa caixa também pode ser chamada de Ortoedro Auxiliar, Ortoedro Envolvente, ou ainda, de Paralelepípedo de Referência (ver figura 1.16).

Figura 1.16 - Ortoedro de referência



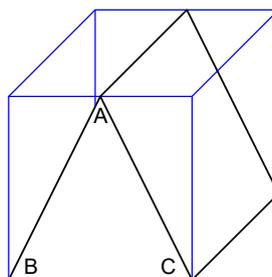
Fonte: Autoras.

O OR possui características que facilitam tanto a sua representação quanto a visualização espacial do objeto, sendo elas:

1. Todas as suas arestas são paralelas a algum dos três eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$ , largura, profundidade e altura, respectivamente;
2. Possui faces retangulares;
3. As faces formam ângulos retos umas com as outras;
4. As faces opostas são iguais entre si.

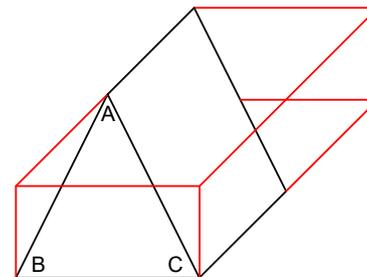
As figuras 1.17 e 1.18 mostram um mesmo objeto inserido em ORs diferentes. Esse exemplo nos mostra como o mesmo objeto pode ter interpretações diferentes dependendo do OR.

Figura 1.17 - Objeto com primeira possibilidade de OR



Fonte: Autoras.

Figura 1.18 - Objeto com segunda possibilidade de OR



Fonte: Autoras.

Na figura 1.17 a face ABC está perpendicular ao chão, colada com a face frontal do OR. Já na figura 1.18 a face ABC está inclinada, ou oblíqua ao chão, como uma rampa.

A técnica do OR é um artifício utilizado para desenhar qualquer objeto. É muito importante que ele envolva completamente o objeto e, além disso, que fique bem “colado” a ele, de modo que possibilite a coincidência de faces e arestas do objeto com faces do OR. Dessa maneira, o OR é a **menor caixa possível** capaz de conter o objeto que se quer desenhar.

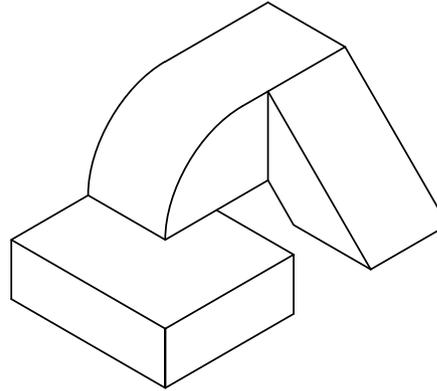
Vantagens de se usar o OR:

1. É um objeto simples de ser desenhado;
2. Seu uso permite um maior controle de quais faces se quer mostrar;
3. Como o OR possui todas as suas arestas paralelas a um dos três eixos coordenados, é fácil fazer uma correlação entre as medidas do objeto e as medidas do OR;
4. Qualquer objeto pode ser colocado, ou imaginado, dentro de um OR, especialmente os objetos com faces curvas ou muito detalhadas. Quanto mais detalhado é o objeto, mais necessário é o OR.

Por todas essas características é possível afirmar que o OR traz informações complementares ao objeto, esclarecendo dúvidas sobre suas propriedades (grandezas lineares e angulares). Dessa forma – repete-se aqui a afirmação feita no item 1.2 – o OR funciona tanto como uma projeção adicional – no sentido defendido por Costa e Costa (1996) – quanto como um elemento auxiliar na interpretação do ponto de vista de sistema projetivo – no sentido apresentado por Melo (2020) – compondo, juntamente com o objeto um sistema de representação.

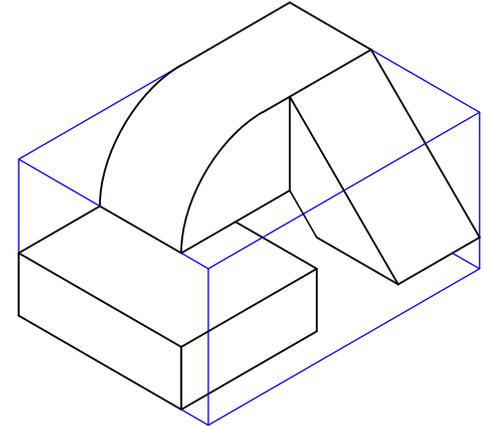
A figura 1.19 mostra um objeto qualquer e a figura 1.20 mostra o mesmo objeto inserido no Ortoedro.

Figura 1.19 - Objeto sem OR



Fonte: Autoras.

Figura 1.20 - Objeto com OR

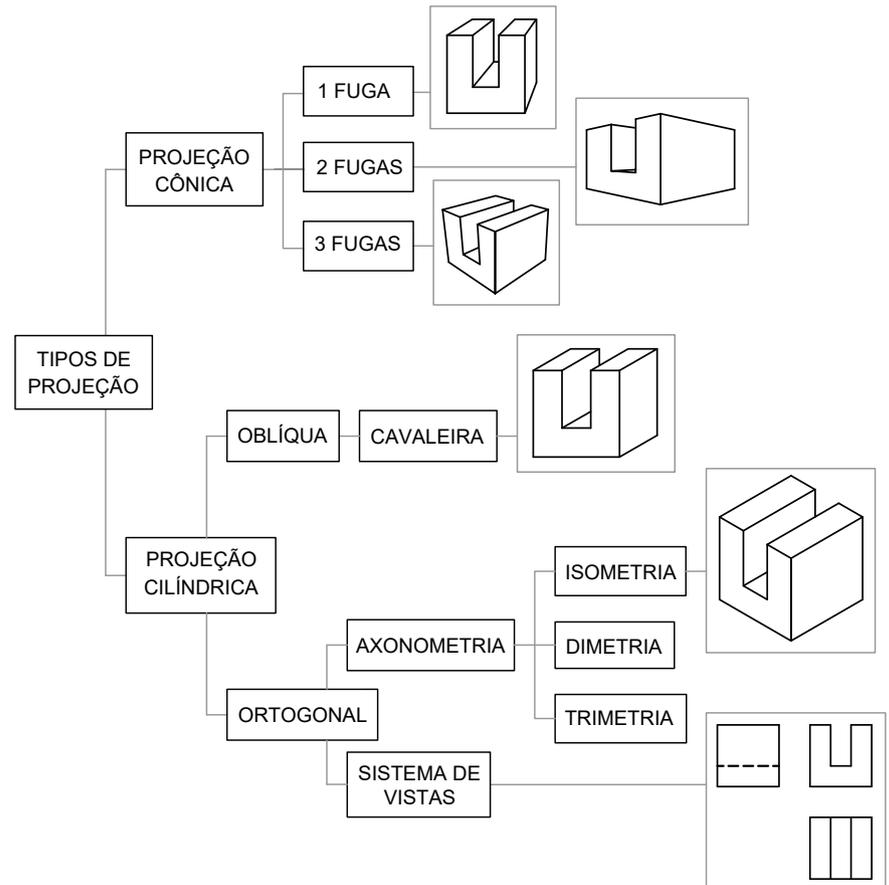


Fonte: Autoras.

## 1.5 TIPOS DE PROJEÇÃO

Existem dois tipos de projeção bastante conhecidos e utilizados, a projeção cônica e a projeção cilíndrica. Aqui serão abordadas as Projeções Cilíndricas, que podem ser subdivididas em Oblíquas (Cavaleira) e Ortogonais (Axonometria e Sistema de Vistas). Observe o mesmo objeto sendo representado em cada um dos tipos de projeção no quadro síntese da figura 1.21.

Figura 1.21 - Tipos de projeção



Fonte: Autoras.

sumário

### 1.5.1 Projeção cônica

As Projeções Cônicas simulam a visão humana, por isso sua representação é mais facilmente percebida mesmo por pessoas que não conhecem as regras do Desenho Técnico. O estudo, a definição, a conceituação e a caracterização das Projeções Cônicas são um tema amplo. No entanto, esse conteúdo será abordado de forma breve nesse livro uma vez que o foco deste trabalho são as Projeções Cilíndricas.

Na projeção Cônica o centro de projeção é chamado de próprio, isso porque ele está a uma distância finita do objeto. Esse sistema é bem semelhante ao exemplo dado anteriormente, na figura 1.13 na qual o centro de projeção é uma fonte de luz.

No exemplo da figura 1.22 é fácil perceber que as projetantes que partem dos olhos do observador formam um feixe cônico. Por essa razão o Sistema de Projeção é chamado de Cônico. Esse feixe projeta o objeto, no caso uma esfera, no plano de projeção, ficando a imagem projetada em forma de circunferência.

A figura 1.23 traz um exemplo de projeção cônica de um objeto bidimensional, o triângulo ABC, o qual é projetado a partir do centro de projeção O e forma a imagem A'B'C'.

Figura 1.22 - Feixe cônico

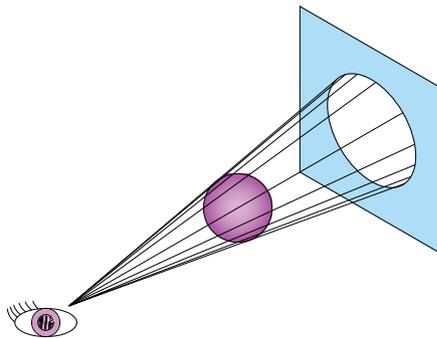
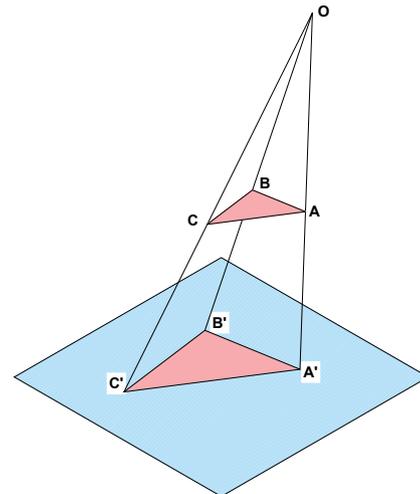


Figura 1.23 - Projeção cônica do triângulo ABC

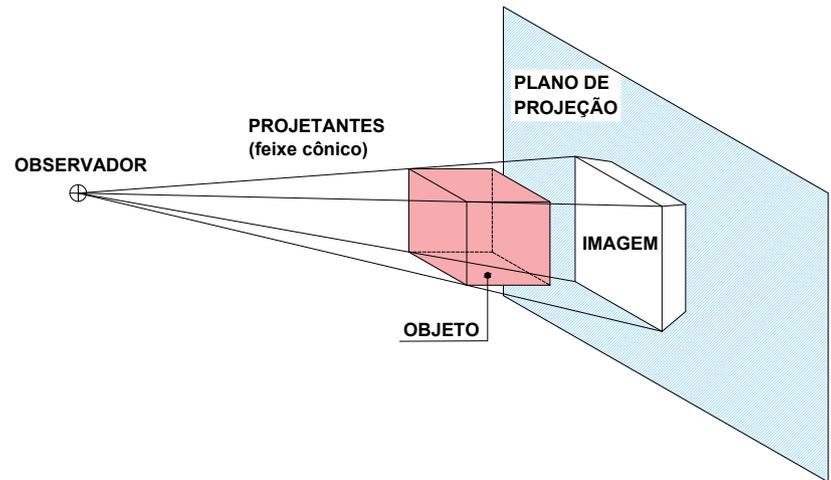


Fonte: Autoras.

Fonte: Autoras.

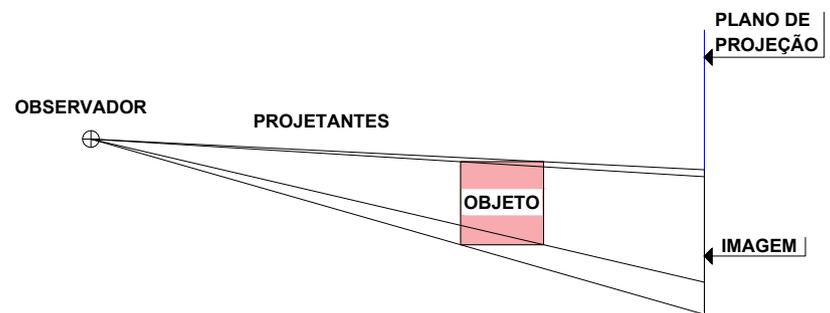
As figuras 1.24 e 1.25 mostram a mesma cena vista de dois pontos de vista diferentes, a primeira mostra uma perspectiva esquemática e a segunda mostra um perfil esquemático desta perspectiva. Ambas as figuras mostram uma projeção cônica com o objeto localizado entre o observador e o plano de projeção. Ao observar as duas imagens, é possível perceber claramente a relação entre os elementos que compõem o sistema projetivo (observador, projetantes, objeto e sua imagem).

Figura 1.24 - Projeção Cônica, perspectiva da situação



Fonte: Autoras.

Figura 1.25 - Projeção Cônica, perfil da situação



Fonte: Autoras.

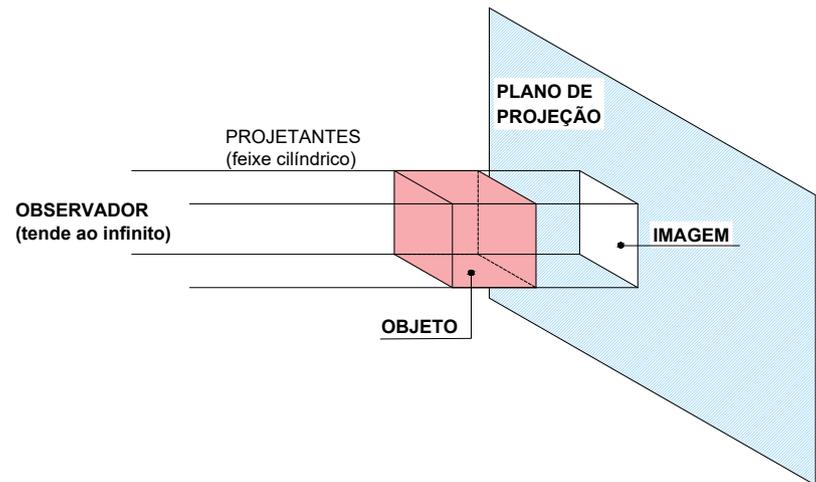
### 1.5.2 Projeção cilíndrica

Na Projeção Cilíndrica o observador está a uma distância infinita do objeto. Nesse caso o centro de projeção é **impróprio** (ver figuras 1.26 e 1.27).

Diferentemente do Sistema Cônico no qual as projetantes são concorrentes em um ponto (centro de projeção), no Sistema Cilíndrico, as projetantes são paralelas entre si. Isto é, as projetantes partem do centro de projeção (impróprio) num feixe de retas paralelas, como as geratrizes de um cilindro; é por essa razão que esse sistema de projeção é chamado de Cilíndrico.

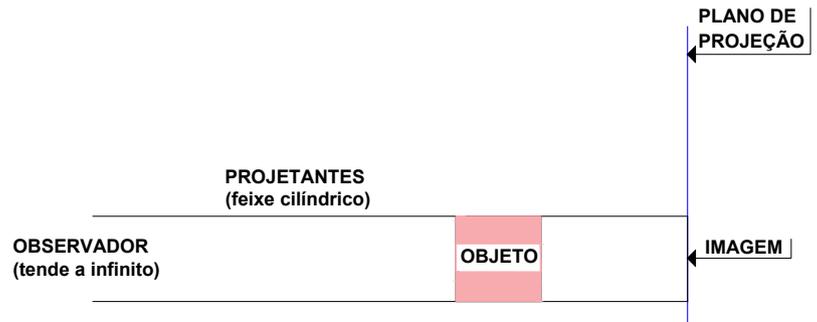
Um exemplo que ilustra bem a mecânica desse sistema de projeção é o dos raios luminosos que partem do sol. O sol está a uma distância tão grande da Terra que ao chegar à sua superfície os raios luminosos estão quase paralelos entre si e aí projetam a sombra dos objetos sobre a superfície terrestre de forma cilíndrica.

Figura 1.26 - Projeção cilíndrica, perspectiva da situação



Fonte: Autoras.

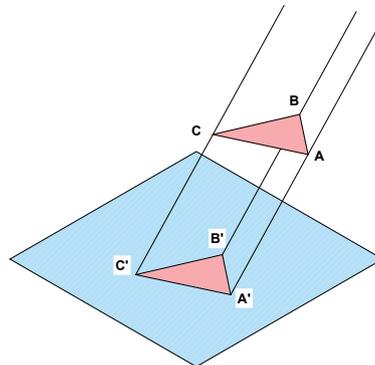
Figura 1.27 - Projeção cilíndrica, perfil da situação



Fonte: Autoras.

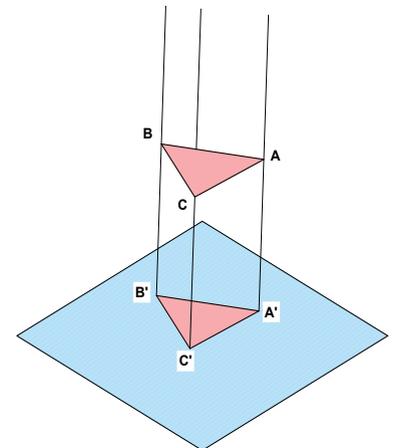
No Sistema Cilíndrico de Projeção existem as projeções cilíndricas oblíquas (figura 1.28) e as projeções cilíndricas ortogonais (figura 1.29). O que diferencia uma da outra é o ângulo de incidência das retas projetantes no plano de projeção. Nas projeções cilíndricas oblíquas o ângulo é diferente de  $90^\circ$  e nas projeções cilíndricas ortogonais esse ângulo é igual a  $90^\circ$ .

Figura 1.28 - Projeção cilíndrica oblíqua do triângulo ABC



Fonte: Autoras.

Figura 1.29 - Projeção cilíndrica ortogonal do triângulo ABC

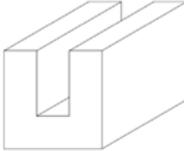
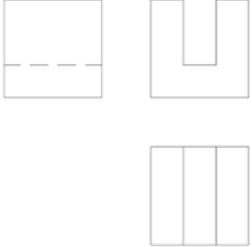


Fonte: Autoras.

O quadro 1.2 traz diferentes representações de um mesmo objeto, as quais são utilizadas no Desenho Técnico: Cavaleira, Isometria e Sistema de Vistas. Essas representações se diferenciam em função de dois aspectos:

1. Tipo de **projeção**: cilíndrica (ortogonal ou oblíqua);
2. Posicionamento do **ortocadro de referência** em relação ao plano de projeção.

Quadro 1.2 - Projeções mais utilizadas no Desenho Técnico

PROJEÇÕES MAIS USADAS NO DESENHO TÉCNICO*			
	<b>CAVALEIRA</b> Projeção Cilíndrica Oblíqua	<b>ISOMETRIA</b> Projeção Cilíndrica Ortogonal	<b>SISTEMA DE VISTAS (MONGEANAS)</b> Projeção Cilíndrica Ortogonal
<b>OBSERVADOR</b>	Infinito	Infinito	Infinito
<b>PROJETANTES</b>	Oblíquas ao Plano de Projeção	Ortogonais ao Plano de Projeção	Ortogonais ao Plano de Projeção
<b>OBJETO</b>	Face frontal do OR paralela ao Plano de Projeção	OR em posição oblíqua** ao Plano de Projeção	Face frontal do OR paralela ao Plano de Projeção
<b>IMAGEM</b> (resultante do processo de projeção)			
<p>*Esse é um quadro síntese que apresenta apenas um esquema geral dos Sistemas de Projeção tendo como base alguns dos elementos que os compõe (observador, projetantes, objeto, imagem resultante) e que serão trabalhados detalhadamente nos capítulos 2, 3 e 4, respectivamente, deste livro.</p> <p>**No capítulo 3, no qual será trabalhada a Isometria, será especificada a posição exata do OR para se gerar uma Isometria.</p>			

Fonte: Autoras.

## 1.6 APLICABILIDADE DA PERSPECTIVA CILÍNDRICA

Algo importante e motivador ao aprender um novo conteúdo é saber sobre a aplicabilidade do mesmo. Uma pergunta sempre válida diante de um novo conhecimento é “Que usos esse conteúdo possui?” ou, no caso específico do conteúdo em questão, “Que usos a representação de objetos tridimensionais em duas dimensões pode ter para um futuro profissional?”

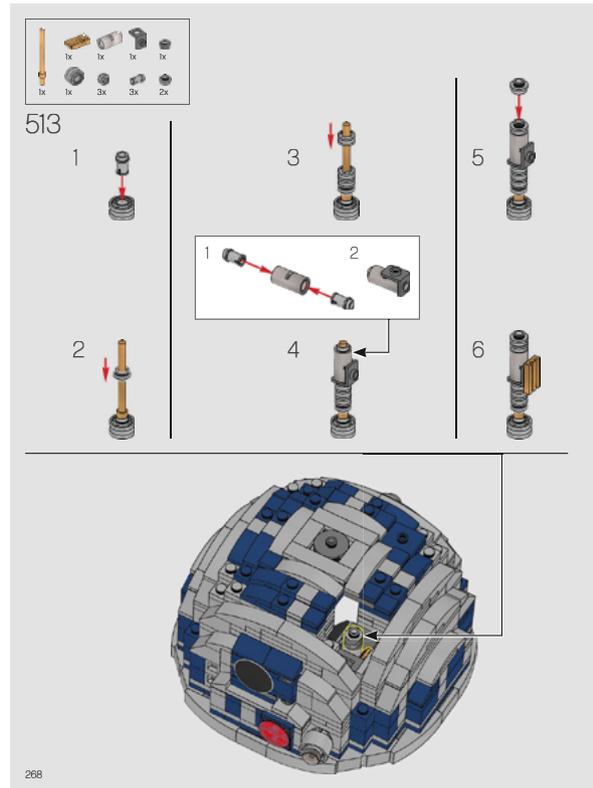
A primeira aplicação seria a representação de objetos que muitas vezes estão apenas no plano das ideias. Quando é necessário comunicar uma ideia para outros, apenas palavras não explicam tudo, especialmente quando as ideias tratam de Formas.

As Perspectivas Cilíndricas são indispensáveis para todas as áreas do conhecimento que trabalham ou estudam a **Forma**: arquitetura, engenharia, arte, design, expressão gráfica, entre outras. Tal tipo de representação é a base do Desenho Técnico.

Outra aplicação das Perspectivas Cilíndricas está presente em manuais de equipamentos, sejam de móveis, de máquinas e até de brinquedos. Esses se utilizam das Perspectivas Cilíndricas tipo Cavaleira ou Axonometria (Isometria, Dimetria e Trimetria) para representar peças e equipamentos.

A figura 1.30 integra um manual virtual para montagem de um brinquedo. Nela é possível observar que as peças, desde o menu até a representação da peça a ser montada, estão em Axonometria.

Figura 1.30 - Manual virtual para montagem de um brinquedo.



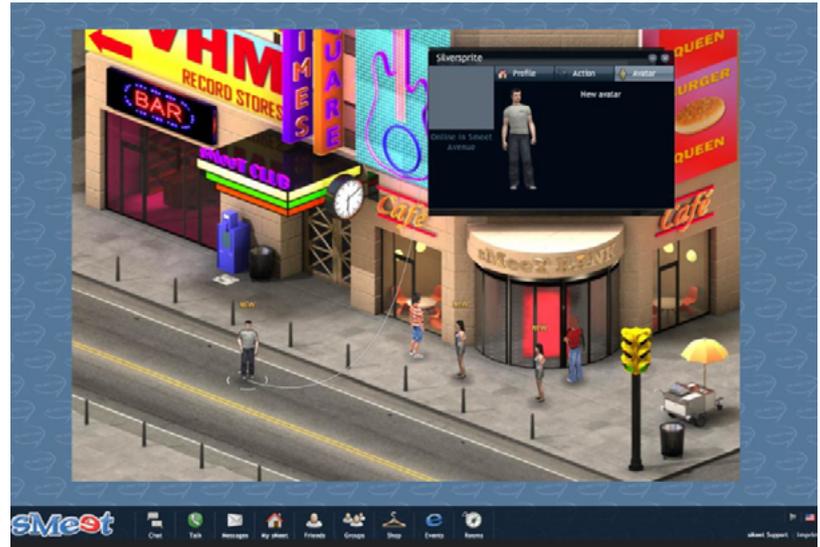
Fonte: Site Oficial Lego, 2022<sup>5</sup>.

Outra forma de aplicação das perspectivas está nos ambientes virtuais de jogos. Nesse ambiente a visão isométrica é um recurso amplamente utilizado, como mostra a figura 1.31.

sumário

5 Disponível em: <https://www.lego.com/en-us/service/buildinginstructions/75308>. Acesso em: 16 jul. 2022.

Figura 1.31 - Jogo social 3D



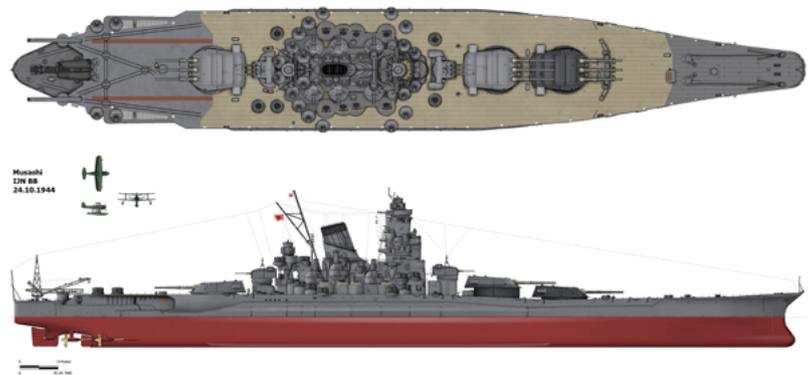
Fonte: Wordshore – Flickr, 2022<sup>6</sup>.

Nas áreas de arquitetura, engenharias, expressão gráfica e design, a aplicação das Representações Gráficas em geral é quase uma obrigatoriedade, porque não há como falar de objetos, sejam reais ou virtuais, sem lançar mão do uso de algum tipo de representação da Forma. As Representações Gráficas nesse caso funcionam como recurso para estabelecer a comunicação das ideias/projetos na área. Nesse caso são utilizadas tanto as representações gráficas analógicas quanto as digitais. As representações gráficas analógicas compreendem os desenhos feitos à mão livre e os feitos com instrumentos de desenho. Já as representações gráficas digitais são feitas com o auxílio de *softwares* especializados. Independentemente de como as Representações Gráficas são elaboradas, para elaborá-las são necessários conhecimentos específicos sobre o assunto.

6 Disponível em: <https://www.flickr.com/photos/silversprite/2836721106/in/photostream/>. Acesso em: 16 jul. 2022.

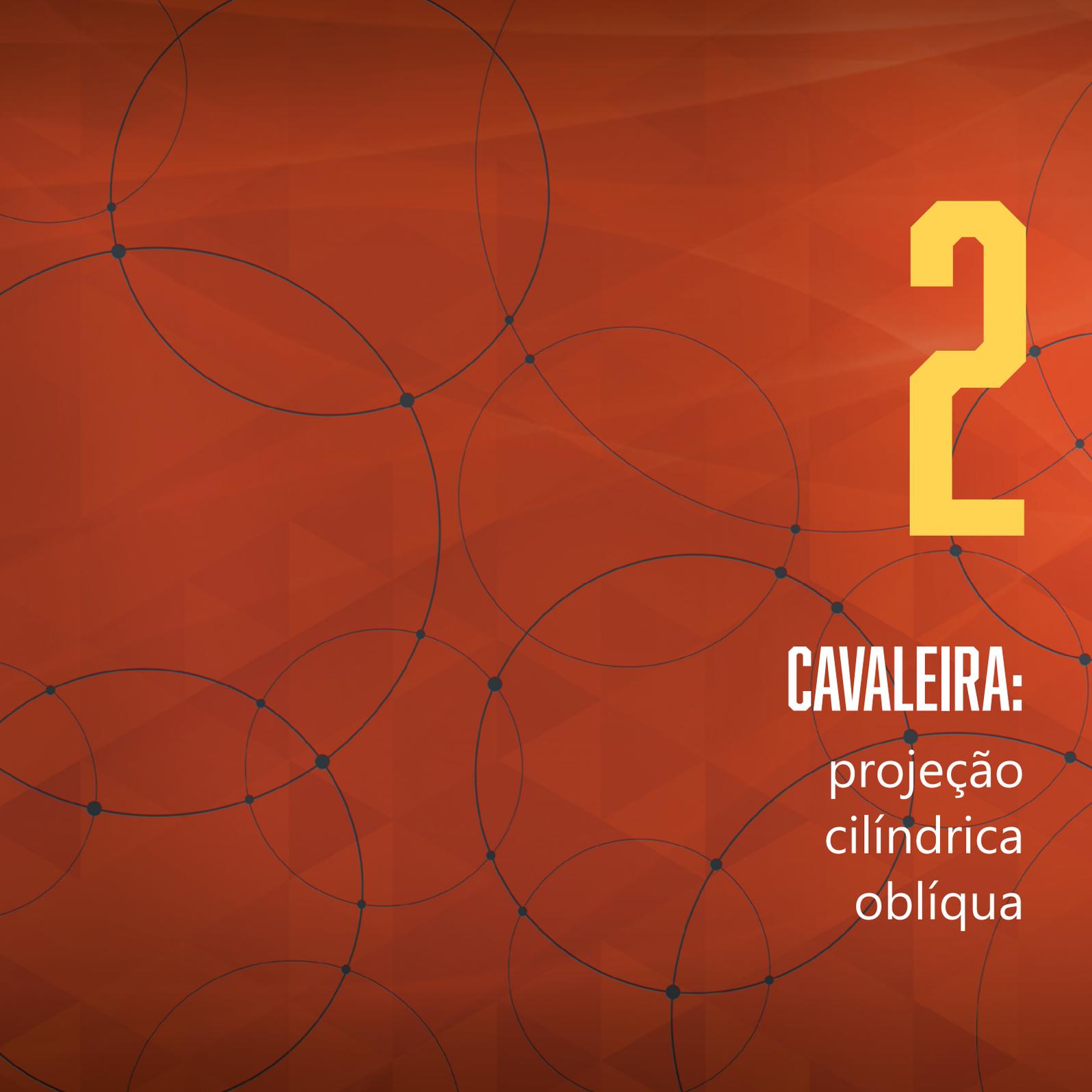
A figura 1.32 mostra a representação gráfica de uma embarcação feita com o auxílio de um *software* gráfico. Muitos acreditam que com o amplo uso do computador não será mais necessário aprender conceitos que são intrínsecos a uma representação gráfica como a da citada figura. No entanto, mesmo com os mais avançados *softwares* disponíveis no mercado, a representação pode ficar incorreta ou incompleta. Isso acontece porque para utilizar uma Representação Gráfica digital são necessários no mínimo quatro tipos de conhecimento: (1) saber o que se quer executar (a ideia do projeto); (2) saber representar essa ideia (conhecer as propriedades da Forma e suas possibilidades de representação (assunto abordado neste livro)); (3) conhecer sobre convenções para a representação dentro do Desenho Técnico (normas técnicas) e, finalmente, (4) conhecer as possibilidades e limitações do software que se quer utilizar.

Figura 1.32 - Representação gráfica de uma embarcação



Fonte: Alexpl – Wikimedia Commons, 2022<sup>7</sup>.

7 Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Musashi1944.png>. Acesso em: 16 jul. 2022.



2

**CAVALEIRA:**

projeção  
cilíndrica  
oblíqua

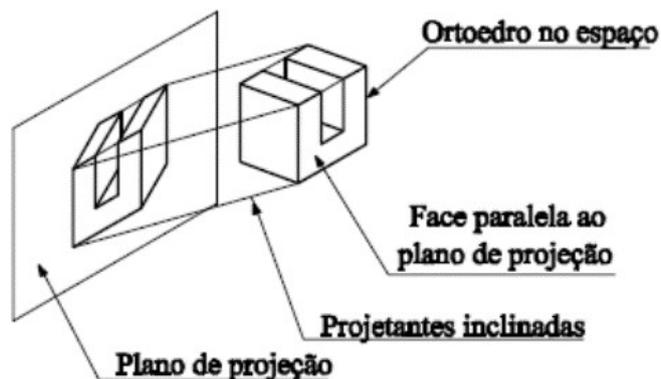
## 2.1 CARACTERIZAÇÃO DA CAVALEIRA

Conforme visto no item 1.5 do capítulo anterior, as representações de objetos em projeções ou perspectivas se diferenciam em função de dois aspectos:

1. **Tipo de projeção:** cônica ou cilíndrica (ortogonal ou oblíqua);
2. Posicionamento do **Ortoedro de Referência (OR)** em relação ao plano de projeção.

Com relação ao primeiro aspecto, a **Cavaleira** é uma **Projeção Cilíndrica Oblíqua**, ou seja, as retas projetantes são paralelas entre si e essas encontram o plano de projeção de forma oblíqua, fazendo, portanto, um ângulo diferente de  $90^\circ$ . Já com relação ao segundo aspecto, na **Cavaleira** a posição característica do OR é tal que sua face frontal sempre ficará paralela ao plano de projeção. Observe a figura 2.1.

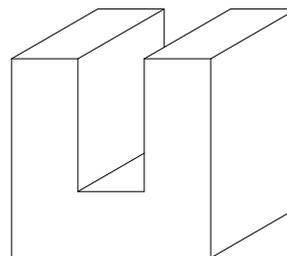
Figura 2.1 - Projeção de objeto em Cavaleira



Fonte: Costa, 2008.

A figura 2.2 traz uma representação em Cavaleira do objeto da figura 2.1. Nela, a face frontal da peça está coincidente com a face frontal do OR, portanto, paralela ao plano de projeção e, conseqüentemente, em Verdadeira Grandeza (VG). Além disso, as arestas referentes às larguras, profundidades e alturas são paralelas entre si. O capítulo 5 deste livro abordará o tema VG em detalhes.

Figura 2.2 - Representação em Cavaleira de um objeto



Fonte: Autoras.

## 2.2 OBSERVADOR, OBJETO E PLANOS DE PROJEÇÃO

No primeiro capítulo deste livro, foram estudados os elementos que compõem um sistema de projeção. Na Cavaleira esses elementos estão dispostos da seguinte maneira:

1. **Observador:** tende ao infinito, por se tratar de um sistema de projeção cilíndrico;
2. **Projetantes:** partem do centro de projeção e encontram o plano de projeção obliquamente;
3. **Objeto e OR:** o OR, que envolve o objeto, possui face frontal paralela ao plano de projeção;
4. **Plano de projeção:** há apenas um plano de projeção, no qual a imagem do objeto será representada ao final do processo de projeção;

5. **Imagem:** produto final da projeção, representação do objeto.

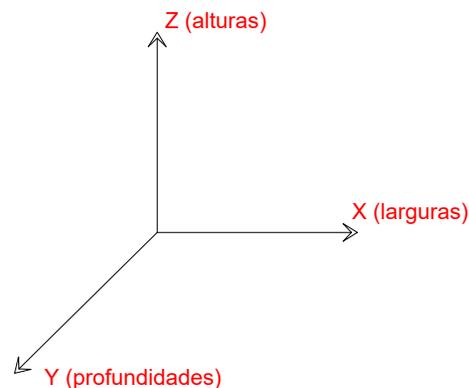
É importante salientar que tais elementos são comuns a todas as projeções (cilíndricas ou cônicas), porém adquirem diferentes posições em relação ao outro a depender do sistema de representação.

### 2.3 EIXOS COORDENADOS

A visualização de objetos tridimensionais se dá com mais facilidade quando se utilizam os eixos coordenados, uma vez que eles funcionam como uma estrutura que dá suporte à representação. Sendo assim, o eixo **x** (abscissas), é o eixo referente às **larguras**; o eixo **y** (ordenadas) é o eixo referente às **profundidades**, e o eixo **z** (cotas), é o eixo referente às **alturas**. Observe que, em uma projeção do tipo Cilíndrica, todas as **larguras** da peça ficarão **paralelas** ao eixo **x**, todas as **profundidades** ficarão **paralelas** ao eixo **y** e todas as **alturas** ficarão **paralelas** ao eixo **z**.

A figura 2.3 traz uma representação esquemática dos três eixos coordenados em Cavaleira.

Figura 2.3 - Representação esquemática dos três eixos coordenados em Cavaleira

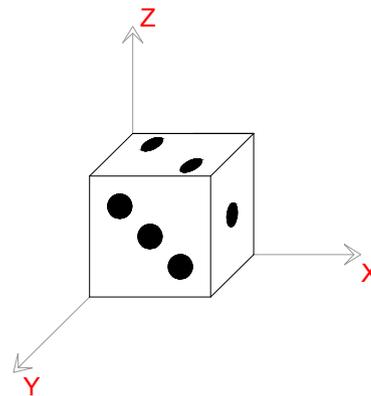


Fonte: Autoras.

### 2.3.1 Posicionamento das faces

A figura 2.4 mostra um dado representado em Cavaleira e referenciado pelos eixos coordenados. A face que contém o número 3 (três) é a face **Frontal** (F), a face que contém o número 2 (dois) é a face **Superior** (S) e a face que contém o número 1 (um) é a face **Lateral Direita** (LD). A face oposta à face frontal é a face **Posterior** (P), já a face oposta à face superior é a face **Inferior** (I) e, finalmente, a face oposta à face lateral direita é a face **Lateral Esquerda** (LE). Nessa figura, a exemplo do OR, as faces opostas são paralelas entre si.

Figura 2.4 - Dado representado em Cavaleira



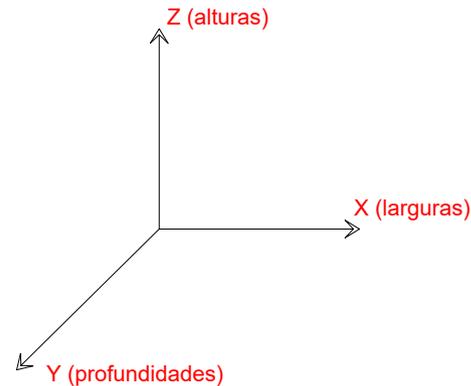
Fonte: Autoras.

#### ATENÇÃO!

É muito comum confundir a denominação das faces laterais, esquerda e direita. A face lateral esquerda fica do lado esquerdo de quem observa. Consequentemente, a face lateral direita fica do lado direito.

É importante lembrar que as representações são inanimadas, elas não possuem consciência e referência próprias. O observador é quem denomina as partes, direções e demais elementos da representação. Portanto, é o referencial levado em consideração é o de quem observa.

Figura 2.3 - Representação esquemática dos três eixos coordenados em cavaleira



Fonte: Autoras.

A figura 2.3 é apresentada novamente para mostrar que quando os eixos coordenados são representados é possível perceber alguns aspectos particulares da Cavaleira.

O primeiro deles é a manutenção da ortogonalidade entre os eixos  $x$  e  $z$ . Se considerarmos o espaço tridimensional (o real), é possível afirmar que todos os eixos fazem  $90^\circ$  entre si. No entanto, se considerarmos a representação em Cavaleira só é possível ver  $90^\circ$  de fato entre os eixos  $x$  e  $z$ . Essa característica confere à Cavaleira um aspecto importante que é o fato dos ângulos e medidas contidas na face frontal e posterior do OR manterem suas VGs, isto é, as medidas da representação são iguais às medidas do objeto real. É por essa razão que na Cavaleira as faces paralelas ao plano de projeção estão em VG. Já as outras faces sofrem algum tipo de deformação, fato que será estudado com mais detalhes adiante.

Dessa maneira, quando se representa uma Cavaleira os eixos  $x$  e  $z$  **sempre** fazem  $90^\circ$  entre si, ou seja, eles ficam fixos nessa posição. Já o eixo  $y$  não tem uma posição fixa. A variação da direção do eixo  $y$  e as implicações dela serão estudadas nos próximos itens.

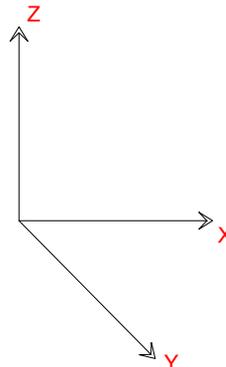
## 2.4 O EIXO Y

As projeções sempre mostram três faces. No caso da Cavaleira a face frontal, que fica paralela ao plano de projeção é considerada a face principal, portanto, é sempre mostrada. Usualmente, são mostradas as três faces que contêm mais detalhes ou as três que melhor definem o objeto. Sendo assim, podemos ter apenas as seguintes combinações:

- Frontal, lateral direita e superior;
- Frontal, lateral esquerda e superior;
- Frontal, lateral direita e inferior; e
- Frontal, lateral esquerda e inferior.

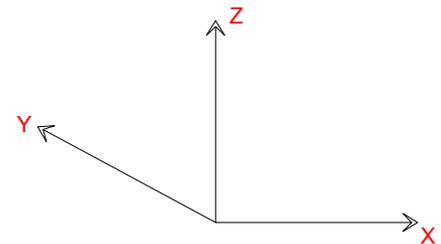
A representação de um ou de outro conjunto de faces, acima listados, depende da direção escolhida para projetar o eixo coordenado y, pois, como foi mencionado, os eixos x e z ficam fixos, fazendo 90° entre si. Assim, caso a direção escolhida para o eixo y seja como a que está na figura 2.5, as faces mostradas são a **Frontal**, a **Lateral Esquerda** e a **Superior**. Já se a direção de y for como na figura 2.6 as faces mostradas são **Frontal**, **Lateral Direita** e **Inferior**.

Figura 2.5 - Eixos coordenados em Cavaleira mostrando faces Frontal, Lateral Esquerda e Superior



Fonte: Autoras.

Figura 2.6 - Eixos coordenados em Cavaleira mostrando faces Frontal, Lateral Direita e Inferior

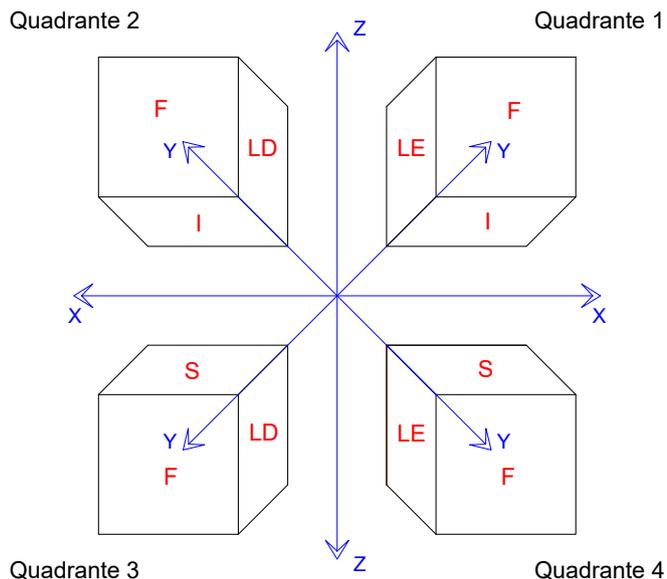


Fonte: Autoras.

A figura 2.7 traz a síntese das quatro possíveis direções que o eixo y pode assumir, determinando as faces que são mostradas em cada caso. Analisando a direção escolhida para a projeção do eixo y quadrante a quadrante, tem-se que:

- No quadrante 1, são mostradas as faces: **Frontal, Lateral Esquerda e Inferior**;
- No quadrante 2 são mostradas as faces: **Frontal, Lateral Direita e Inferior**;
- No quadrante 3, são mostradas as faces: **Frontal, Lateral Direita e Superior**; e, finalmente
- No quadrante 4, são mostradas as faces: **Frontal, Lateral Esquerda e Superior**.

Figura 2.7 - Síntese das quatro possíveis direções do eixo y



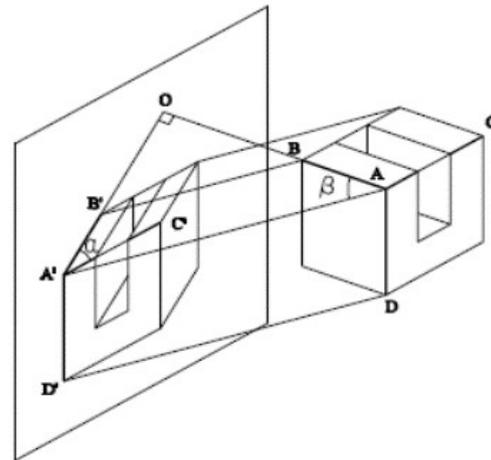
Fonte: Autoras.

## 2.5 PARÂMETROS DA CAVALEIRA

Para representar uma Cavaleira dois parâmetros precisam ser previamente definidos:

1.  $\alpha$ : direção do eixo  $y$  (em valores absolutos e referentes ao eixo  $x$ , este último é fixo na horizontal); e
2.  $K$ : fator de deformação.

Figura 2.8 - Parâmetros da Cavaleira



Fonte: Costa, 2008.

A figura 2.8 apresenta o processo de projeção de um objeto em Cavaleira. Nela percebe-se que no objeto as arestas referentes à largura (AC) e à altura (AD) são paralelas ao plano de projeção e quando projetadas (A'C' e A'D') aparecem nesse plano exatamente com a mesma medida que possuem no espaço. Isso significa que na Cavaleira elas estão em VG.

No entanto, as arestas referentes à profundidade (AB), que no espaço estão perpendiculares ao plano de projeção, quando projetadas (A'B'),

aparecem de maneira deformada. Essa deformação vai depender da direção tomada pelas retas projetantes ( $AA'$ ). Tal direção pode ser determinada por dois ângulos ( $\alpha$  e  $\beta$ ). No próximo item tais ângulos e as relações que eles têm com os parâmetros determinantes da Cavaleira serão estudados.

### 2.5.1 Direção da Cavaleira ( $\alpha$ )

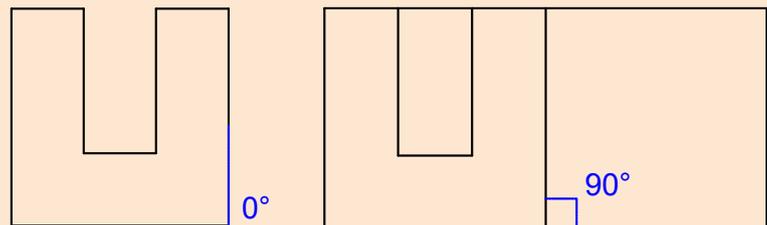
O ângulo  $\alpha$  pode ser definido como sendo o ângulo formado por duas retas: a horizontal da projeção (ex.:  $A'C'$  da figura 2.8) e a projeção da profundidade do objeto (ex.:  $A'B'$  da figura 2.8).

Não existe uma medida definida para  $\alpha$ , ou seja, uma Cavaleira pode ser representada com  $\alpha$  medindo qualquer ângulo entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , considerando cada quadrante em valores absolutos (intervalo aberto, ver quadro em destaque).

#### ATENÇÃO!

Ao escolher a medida de  $\alpha$ , evite os ângulos  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , porque com esses valores só é possível mostrar uma ou duas das faces do Ortoedro de Referência, respectivamente, como mostra a figura 2.9.

**Figura 2.9 - Ortoedro de referência desenhado com ângulos  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente**

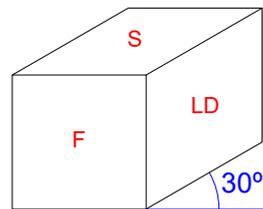


Fonte: Autoras.

As figuras 2.10, 2.11 e 2.12, mostram o mesmo cubo. Percebe-se que a face frontal permanece igual em todas as representações. No entanto, as faces secundárias (superior e lateral direita) aparecem com destaque diferentes, dependendo da porção mostrada.

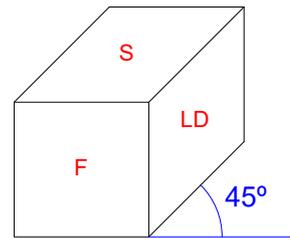
Na figura 2.10,  $\alpha$  mede  $30^\circ$ , e a face LD aparece com bem mais destaque do que a face S. Já na figura 2.11, onde  $\alpha$  mede  $45^\circ$ , ambas as faces aparecem com o mesmo destaque. Finalmente, na figura 2.12, que tem  $\alpha$  medindo  $60^\circ$ , vemos uma porção bem menor da face LD do que da face S. O mesmo pode ser feito com as outras combinações de faces.

Figura 2.10 - Cubo com  $\alpha = 30^\circ$



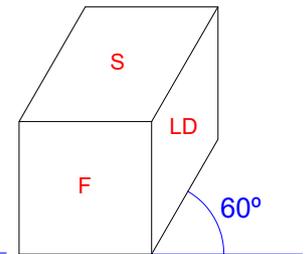
Fonte: Autoras.

Figura 2.11 - Cubo com  $\alpha = 45^\circ$



Fonte: Autoras.

Figura 2.12 - Cubo com  $\alpha = 60^\circ$



Fonte: Autoras.

Após a análise das figuras acima é possível concluir que quando o ângulo  $\alpha$  varia, porções diferentes das faces **Frontal** e **Lateral Direita** são mostradas. Sendo assim, mesmo que estejam sendo mostradas as mesmas faces secundárias, estas ganham destaques diferentes de acordo com o ângulo  $\alpha$ . No entanto, o mesmo não ocorre com a face **FRONTAL**, que aparece com o mesmo destaque nas três figuras. Isso acontece porque ela está paralela ao plano de projeção e, conseqüentemente, em VG. Dessa forma, suas medidas lineares e angulares são resguardadas mesmo depois da sua projeção.

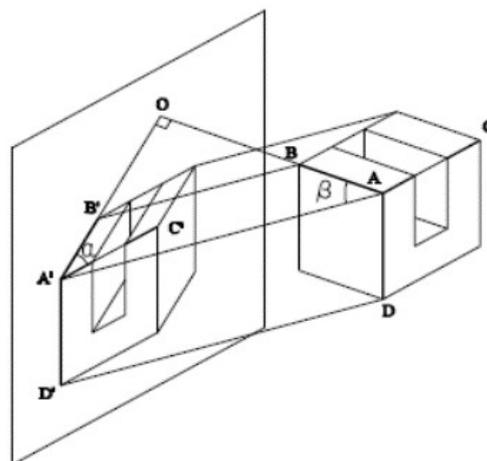
Como dito anteriormente, não existe medida fixa para  $\alpha$ , no entanto essa medida vai influenciar a porção vista das faces de um objeto. Os ângulos existentes nos esquadros ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ ) acabam sendo, pela

praticidade, os ângulos mais utilizados na elaboração de Cavaleiras, mas nada impede que outras medidas sejam adotadas.

### 2.5.2 Fator de deformação K

O fator de deformação K consiste na relação constante entre o comprimento real de um segmento (ex.: AB, da figura 2.8) e o comprimento dele depois de projetado (ex.: A'B'). Essa relação também é dada pela tangente do ângulo  $\beta$ , o qual está contido no triângulo AOA' da figura 2.8.

Figura 2.8 - Parâmetros de Cavaleira



Fonte: Costa, 2008.

#### DEMONSTRAÇÃO:

$$tg(\beta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{A'O}{AO} = \frac{A'B'}{AB} \text{ Assim: } K = \frac{A'B'}{AB} \leftrightarrow A'B' = K \times AB$$

Logo: Se  $K = 1$ ;  $A'B' = AB$ , e se  $K = 0,5$ ;  $A'B' = 0,5 \times AB$

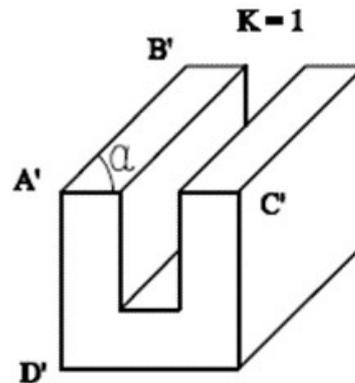
**ATENÇÃO!**

O fator de deformação  $K$  atua apenas nas projeções das arestas que são paralelas ao eixo coordenado  $y$ , ou seja, aquelas que no espaço são ortogonais ao plano de projeção. As projeções das arestas paralelas ao plano de projeção permanecem com o tamanho real.

A prática mostrou que se o fator de deformação  $K$  variar entre 0,5 e 1 a representação da peça se assemelha bastante ao aspecto real da mesma. Portanto, para que a projeção se assemelhe à peça real é interessante utilizar esses valores. Quando uma peça está representada em Cavaleira sem indicação do fator de deformação, deve-se admitir que o é  $K=1$ .

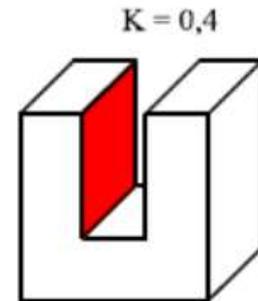
O fator de deformação  $K$  é utilizado nos casos em que se quer mostrar uma face secundária em detalhes. Algumas vezes a representação da Cavaleira sem deformação ( $K=1$ ) pode resultar em uma representação em que porções de uma determinada face não aparecem. Por exemplo, na figura 2.13, que possui  $K=1$ , uma das faces internas do objeto não está sendo mostrada por completo. Aplicando-se um  $K=0,4$  no mesmo objeto, essa face passa a ser vista por completo como mostra a figura 2.14.

Figura 2.13 - Objeto com  $K=1$



Fonte: Costa, 2008.

Figura 2.14 - Objeto com  $K=0,4$



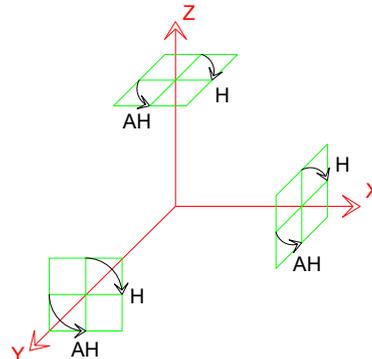
Fonte: Costa, 2008.

## 2.6 ROTAÇÃO DA PEÇA

A rotação é uma operação gráfica utilizada no aprendizado da visualização espacial. Uma maneira de realizar essa rotação é ter como referência um dos eixos coordenados e imaginar a peça sendo rotacionada em torno dele (ver figura 2.15). Dessa forma, a rotação depende:

1. Do **eixo** escolhido como referência: x, y ou z;
2. Do **sentido** da rotação, se horário (H) ou anti-horário (AH); e
3. Da **amplitude** da rotação, ou seja, com quantos graus deverá ser feito o giro.

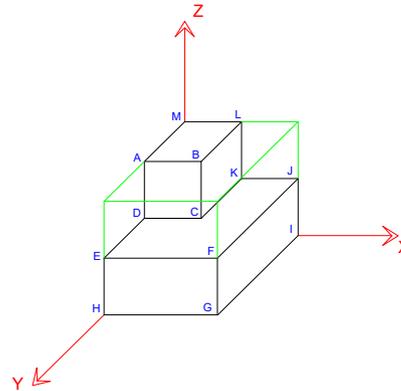
Figura 2.15 - Rotação nos eixos coordenados em Cavaleira



Fonte: Autoras.

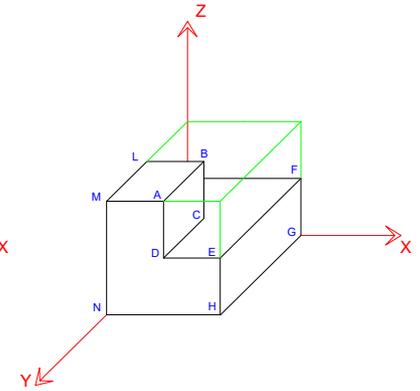
As figuras 2.16 e 2.17 mostram um exemplo de rotação. Na primeira figura tem-se a peça na posição original, já a figura 2.17 mostra a representação da mesma peça após uma rotação de 90°, no sentido anti-horário, tendo como referência o eixo z.

Figura 2.16 - Objeto na posição inicial, antes da rotação



Fonte: Autoras.

Figura 2.17 - Objeto após rotação de 90°, no sentido anti-horário, tendo como referência o eixo z



Fonte: Autoras.

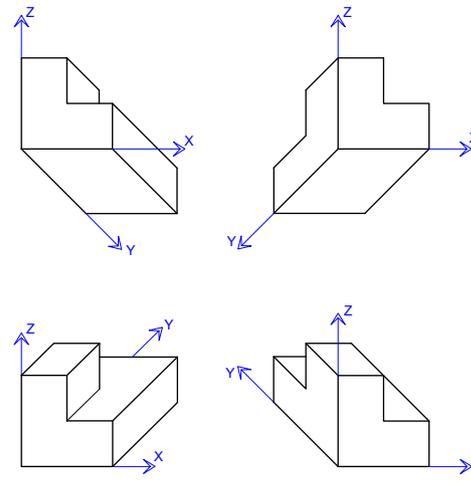
### 2.6.1 Diferença entre rotação e variação da direção da projeção do eixo Y

É importante não confundir a **rotação**, discutida no item 2.6, com a **variação da direção da projeção do eixo y**, discutido no item 2.4. Tais procedimentos podem ocorrer tanto em comandos distintos como em um mesmo comando. Se esse for o caso, a rotação ocorrerá primeiro e somente no plano das ideias (mentalmente), ou seja, o objeto será rotacionado tendo como referência um dos eixos coordenados e, em seguida, serão escolhidas as faces que serão mostradas após a rotação. Essa escolha dependerá da direção tomada pela projeção do eixo y.

A peça da figura 2.16 após rotacionada 90°, no sentido anti-horário, tendo como referência o eixo z, pode ser representada de quatro maneiras, ou seja, em quatro combinações de vistas, conforme mostra a figura 2.18,

na qual é possível perceber que as quatro representações mostram a peça na mesma posição, porém as faces mostradas variam.

Figura 2.18 - Quatro representações da peça após a rotação na mesma posição



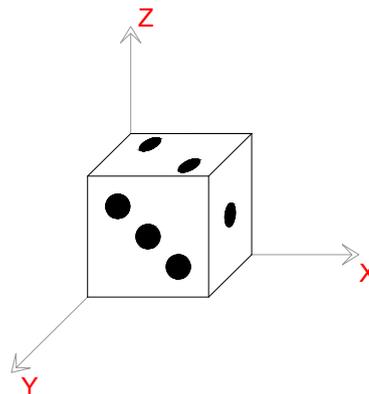
Fonte: Autoras.

### 2.6.2 Diferença entre faces e vistas

Existe uma diferença entre o que se chama de **face** e o que se chama de **vista**. A face pertence ao objeto, enquanto a vista é própria da posição do observador e se reflete nos dados escolhidos para a representação do Ortoedro de Referência (OR).

As vistas do OR se configuram num referencial fixo de posicionamento. Por exemplo, na figura 2.4, que apresentamos novamente, a face do objeto que contém o número 2 (dois) corresponde à vista **Superior** do OR. Da mesma maneira, a face do objeto que contém o número 3 (três) corresponde à vista **Frontal** do OR. Já a face do objeto que contém o número 1 (um) corresponde à vista **Lateral Direita** do OR.

Figura 2.4 - Dado representado em Cavaleira



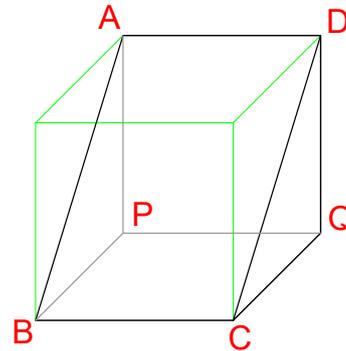
Fonte: Autoras.

## 2.7 TRABALHANDO COM ARESTAS QUE NÃO ESTÃO PARALELAS AOS EIXOS COORDENADOS

Existem inúmeras situações onde é preciso trabalhar com arestas que não estão paralelas aos eixos coordenados, como ocorre na figura 2.19 com as arestas AB e CD.

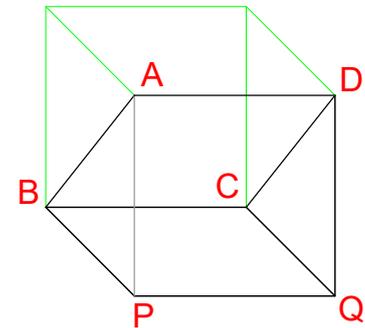
As figuras 2.19 e 2.20 trazem o mesmo prisma, porém cada uma delas mostra vistas diferentes do mesmo. Na primeira figura vemos as vistas F, S e LD. Já na segunda figura podemos ver as vistas F, I, e LD. A única diferença é que escolheu-se trocar a vista S pela I. Observe que a peça não foi rotacionada e nem o  $K$ , nem o  $\alpha$ , foram modificados.

Figura 2.19 - Prisma mostrando as vistas Frontal, Lateral Direita e Superior



Fonte: Autoras.

Figura 2.20 - Prisma mostrando as vistas Frontal, Lateral Direita e Inferior



Fonte: Autoras.

Observando a face ABCD do prisma, percebe-se que as arestas AB e CD são as únicas arestas que não estão paralelas a nenhum dos eixos coordenados. Comparando tais arestas nas duas figuras, nota-se que na primeira figura a dimensão das arestas AB e CD é maior do que a dimensão das mesmas arestas na segunda figura.

Por que isso acontece? Isso acontece porque **as arestas que não estão paralelas aos eixos coordenados têm dimensões que podem variar devido ao efeito da projeção.** Foi o que aconteceu ao trocar as vistas mostradas.

Como trabalhar com esse tipo de aresta? A resposta é: **trabalhar com os invariantes!** Nesse caso, os invariantes são as arestas AP e DQ, que estão paralelas ao eixo z, e as arestas PB e QC, que estão paralelas ao eixo y.

No caso das arestas paralelas ao eixo z (AP e DQ) elas são consideradas invariantes por manterem as medidas da representação iguais às medidas reais do objeto. No caso das arestas paralelas ao eixo y (PB e QC) elas também são consideradas invariantes, pelo mesmo motivo. No entanto, em se tratando do eixo y, é importante observar o valor de K. Quando  $k=1$

as medidas são mantidas, mas quando  $K \neq 1$  é necessário realizar a conversão para saber a sua medida real.

Na prática, para se representar arestas que não são paralelas aos eixos coordenados, é preciso localizar as extremidades destas arestas para realizar o traçado. Assim, no caso do traçado da figura 2.20 a partir da figura 2.19, para traçar as arestas AB e CD é preciso localizar as extremidades A, B, C e D a partir dos invariantes (AP, DQ, PB e QC) o que é algo semelhante a utilizar a estrutura do OR como base para traçado.

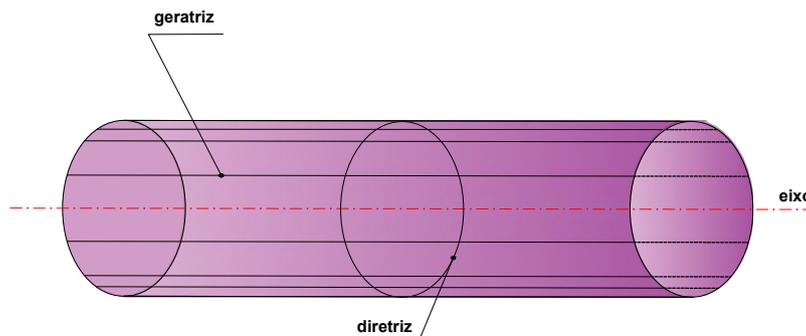
Uma outra maneira de representar as arestas não paralelas aos eixos coordenados é perceber que seus vértices possuem as mesmas coordenadas em relação a um dos eixos coordenados. No caso das figuras 2.19 e 2.20, os vértices A e B possuem a mesma coordenada no eixo x. É preciso então tomar como referência as arestas que estão paralelas aos eixos y e z, que nesse caso não variam de tamanho. É por isso que é tão importante utilizar o OR, pois com ele é possível facilmente visualizar essas relações.

O que foi aprendido sobre a representação de arestas que não estão paralelas aos eixos coordenados também será aplicado no estudo das Projeções Cilíndricas Isométricas, mais especificamente a Isometria Simplificada (ver Capítulo 3), bem como no estudo do Sistema de Vistas (ver Capítulo 4).

## 2.8 CILINDROS E CONES

Cilindros e cones são sólidos geométricos gerados segundo “leis de geração”. Uma das maneiras de obter uma superfície cilíndrica ocorre quando uma reta (geratriz), paralela a um eixo, se desloca em torno de uma circunferência (diretriz), como aparece na figura 2.21.

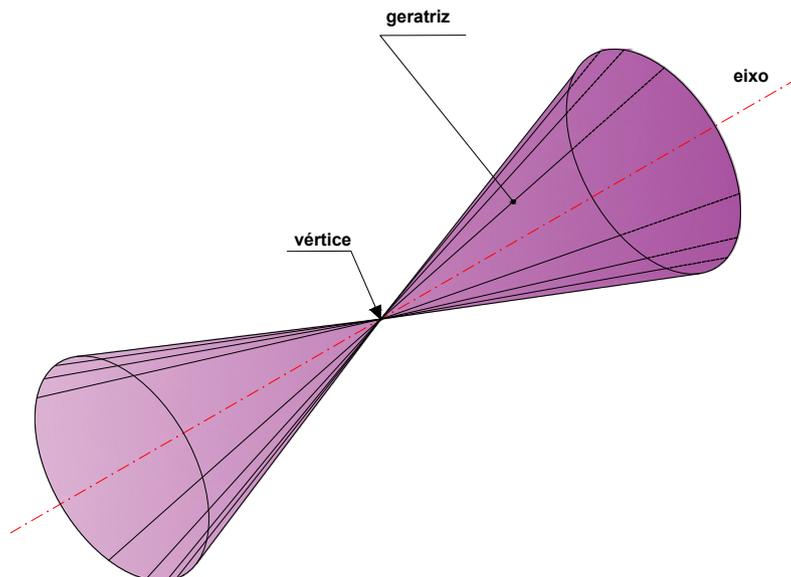
Figura 2.21 - Superfície cilíndrica e seus elementos



Fonte: Autoras.

Superfícies cônicas podem ser geradas de forma semelhante à descrita acima, com a ressalva de que a geratriz é concorrente com o eixo em um ponto chamado vértice (ver figura 2.22).

Figura 2.22 - Superfície cônica e seus elementos

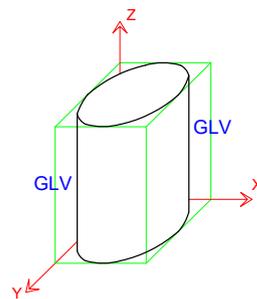


Fonte: Autoras.

Neste livro serão estudados apenas os **Cilindros** e os **Cones de Revolução**. Eles são casos particulares dos cilindros e cones uma vez que possuem uma propriedade específica que diz que todo plano perpendicular ao eixo desses sólidos cortará a superfície deste sólido segundo uma circunferência.

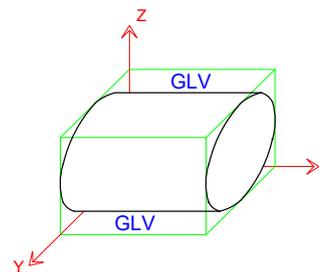
Na representação de objetos em forma de cilindros e cones de revolução em Cavaleira são utilizados segmentos curvos (circunferências e elipses) para representar as faces planas, e segmentos retos para representar a superfície curva. Tais segmentos retos são chamados de Geratrizes de Limite de Visibilidade (GLV). Nas representações dos cilindros de revolução, as GLVs, em geral, são posicionadas de maneira paralela a um dos eixos coordenados. Na figura 2.23 as GLVs estão paralelas ao eixo z, enquanto na figura 2.24 elas estão paralelas ao eixo x, já na figura 2.25 elas estão paralelas ao eixo y.

Figura 2.23 - Cilindro com GLVs paralelas ao eixo z



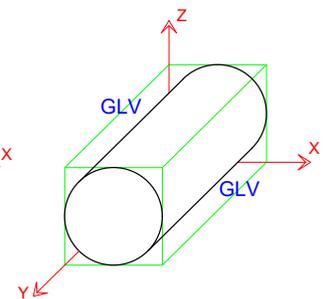
Fonte: Autoras.

Figura 2.24 - Cilindro com GLVs paralelas ao eixo x



Fonte: Autoras.

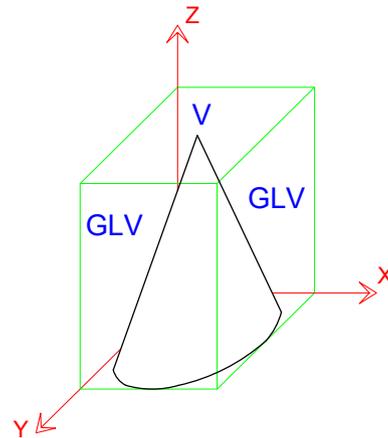
Figura 2.25 - Cilindro com GLVs paralelas ao eixo y



Fonte: Autoras.

No caso da representação de objetos em forma de cones de revolução, as GLVs concorrem em um ponto e esse é chamado de vértice (ver figura 2.26). Tais elementos serão estudados mais adiante.

Figura 2.26 - Cone em Cavaleira com destaque para as GLVs

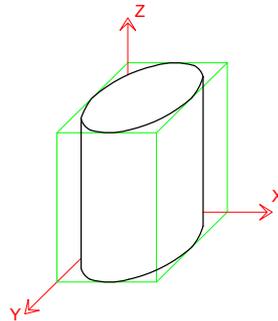


Fonte: Autoras.

### 2.8.1 Cilindros

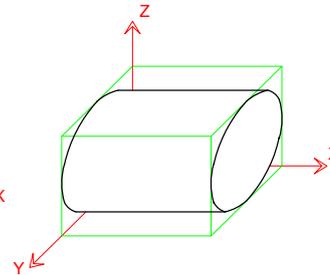
Um objeto em forma de cilindro possui duas faces planas e uma superfície curva. No espaço as faces planas são compostas por circunferências. Entretanto, quando tais faces são representadas em Cavaleira, elas podem permanecer com forma de circunferência ou tomar forma de elipse. Isso vai depender da posição dessas faces em relação aos eixos coordenados, como mostram as figuras 2.27, 2.28 e 2.29.

**Figura 2.27 - Cilindro com faces planas paralelas ao plano formado pelos eixos x e y**



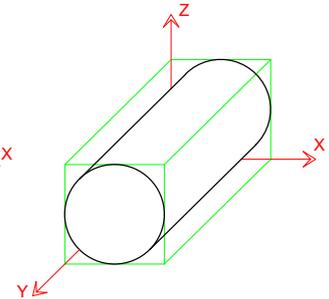
Fonte: Autoras.

**Figura 2.28 - Cilindro com faces planas paralelas ao plano formado pelos eixos y e z**



Fonte: Autoras.

**Figura 2.29 - Cilindro com faces planas paralelas ao plano formado pelos eixos x e z**



Fonte: Autoras.

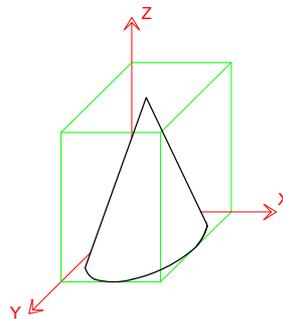
A figura 2.27 traz a representação de um cilindro cujas faces planas são paralelas ao plano formado pelos eixos x e y. Nessa situação, as curvas assumem a forma de elipse. Situação semelhante ocorre com o cilindro da figura 2.28, onde as curvas aparecem como elipses. Nessa figura, as faces planas são paralelas ao plano formado pelos eixos y e z. Já na figura 2.29, as faces planas aparecem como circunferências, nesse caso, elas estão paralelas ao plano formado pelos eixos x e z.

É importante destacar que toda vez que a face plana do cilindro estiver paralela ao plano de projeção (plano formado pelos eixos x e z), como é o caso da figura 2.29, ela vai ser representada como circunferência, isso ocorre porque ela está em VG. Já se a face plana estiver perpendicular ao plano de projeção, como é o caso das figuras 2.27 e 2.28, a face vai ser representada como uma elipse, uma vez que sofre deformação causada pelo eixo y.

## 2.8.2 Cones

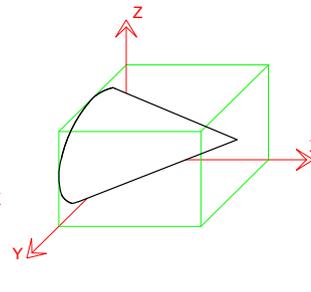
Situações semelhantes às apresentadas no item anterior ocorrem na representação de objetos com forma de cone. As figuras 2.30, 2.31 e 2.32 mostram que a face plana do cone pode aparecer em forma de circunferência ou de elipse pelas mesmas razões explicadas acima para o cilindro.

**Figura 2.30 - Cone com face plana paralela ao plano formado pelos eixos x e y**



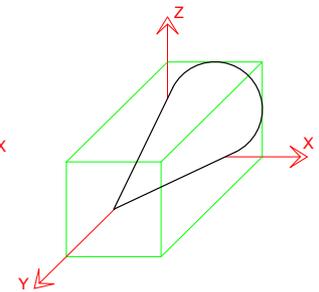
Fonte: Autoras.

**Figura 2.31 - Cone com face plana paralela ao plano formado pelos eixos y e z**



Fonte: Autoras.

**Figura 2.32 - Cone com face plana paralela ao plano formado pelos eixos x e z**



Fonte: Autoras.

Os cones das figuras 2.30 e 2.31 têm suas faces planas representadas em forma de elipse, uma vez que se apoiam em um plano paralelo tanto aos eixos x e y, como aos eixos y e z, respectivamente, sofrendo assim uma deformação, passando de circunferência (real) para elipse (representada). Já na figura 2.32 a face plana do cone aparece como uma circunferência porque ela está paralela ao plano de projeção (plano formado pelos eixos x e z), portanto em VG.

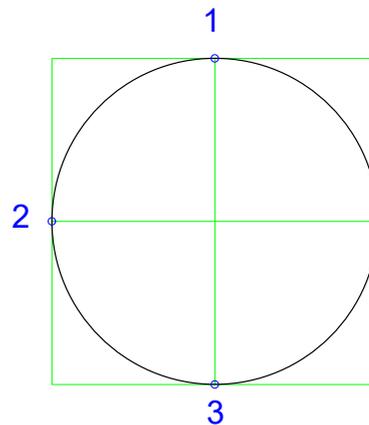
### 2.8.3 A representação da elipse

A representação de elipses na Cavaleira se dá por meio da utilização de alguns procedimentos que auxiliam esse traçado. A seguir serão apresentados dois deles: o procedimento dos 8 pontos, também chamado de procedimento das diagonais e o procedimento dos “n” pontos.

#### a. Procedimento dos 8 pontos (procedimento das diagonais)

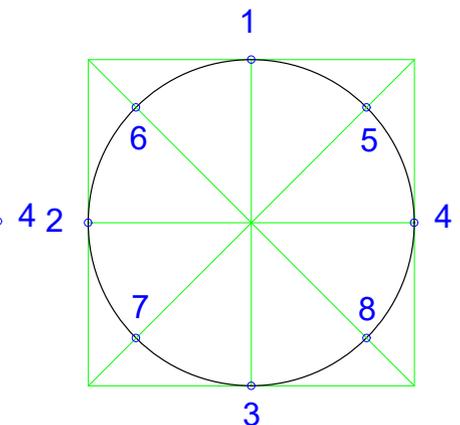
Para representar uma elipse, parte-se de parâmetros que valem para uma circunferência inscrita em um quadrilátero, ou seja, a circunferência tangencia o quadrado na qual está inscrita em quatro pontos, os pontos 1, 2, 3 e 4 da figura 2.33. Esses quatro pontos são os pontos médios dos lados do quadrado. As diagonais do quadrado interceptam a circunferência inscrita nele em outros quatro pontos, que são os pontos 5, 6, 7 e 8 da figura 2.34.

Figura 2.33 - Circunferência que tangencia o quadrado nos pontos 1, 2, 3 e 4



Fonte: Autoras.

Figura 2.34 - Intersecção da circunferência com a diagonal nos pontos 5, 6, 7 e 8

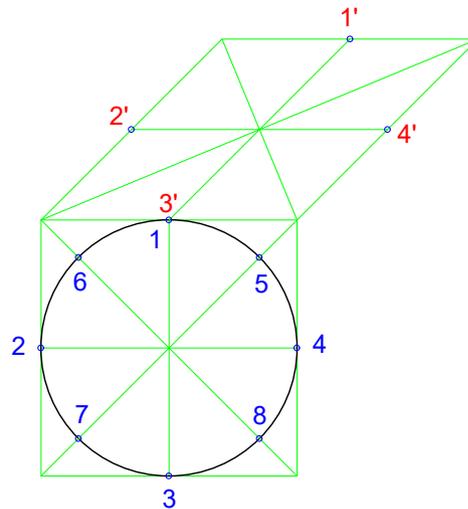


Fonte: Autoras.

Apresentados os parâmetros que valem para a circunferência, é possível transpô-los para a representação da circunferência em perspectiva, ou seja, da elipse. Para isso, inicia-se representando o quadrado que circunscreve a circunferência em perspectiva. Tem-se então, um paralelogramo posicionado de forma perpendicular ao plano de projeção, ou seja, paralelo ao plano formado pelos eixos  $x$  e  $y$  (ver figura 2.35).

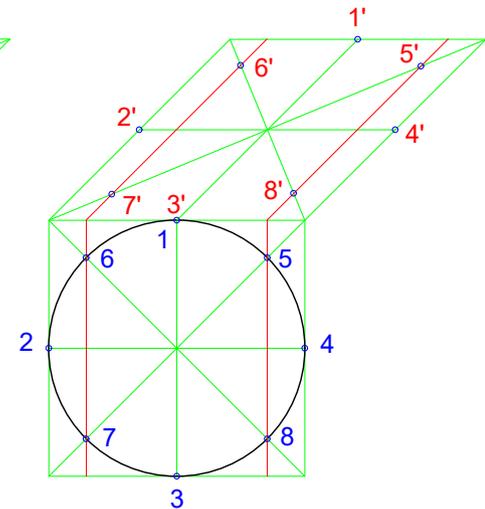
No paralelogramo da figura 2.35 estão representados os mesmos parâmetros vistos na figura 2.34 para o quadrado, ou seja, as retas que ligam os pontos médios dos lados e as diagonais. Através desses parâmetros é possível encontrar os primeiros quatro pontos:  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  e  $4'$ , que são os pontos de tangência da elipse no paralelogramo. Eles correspondem aos pontos 1, 2, 3 e 4 do quadrado original.

**Figura 2.35 - Pontos  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  e  $4'$  no paralelogramo, correspondentes aos pontos 1, 2, 3 e 4**



Fonte: Autoras.

**Figura 2.36 - Pontos  $5'$ ,  $6'$ ,  $7'$  e  $8'$  no paralelogramo, correspondentes aos pontos 5, 6, 7 e 8**

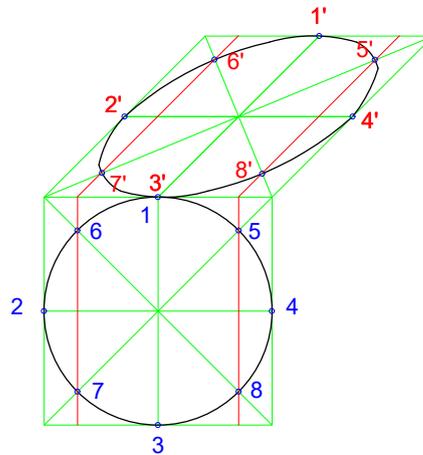


Fonte: Autoras.

Para encontrar os pontos correspondentes aos pontos 5, 6, 7 e 8 do quadrado original, é necessário levá-los para o paralelogramo por meio de quatro linhas, como aparece na figura 2.36. Duas dessas linhas são paralelas ao eixo z, sendo uma a que liga os pontos 6 e 7 e outra a que liga os pontos 5 e 8. Já as outras duas são paralelas ao eixo y, e partem das duas primeiras como mostra a figura 2.36. Quando as essas duas últimas linhas são traçadas, elas se cruzam com as diagonais do paralelogramo, determinando os pontos 6' e 7', e 5' e 8'.

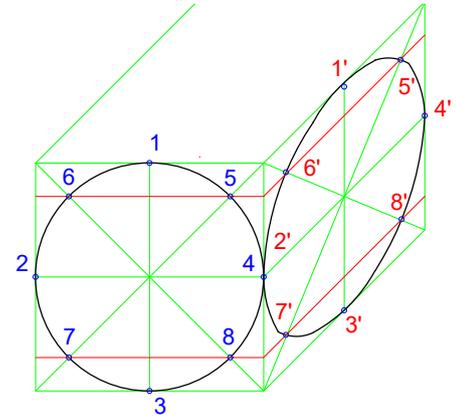
Para finalizar a representação da elipse, traça-se uma linha curva à mão livre, que passe pelos oito pontos encontrados anteriormente (ver figura 2.37). Para representar uma elipse na face lateral direita do objeto procede-se de maneira análoga, como mostra a figura 2.38.

**Figura 2.37 - Traçado da elipse na face superior**



Fonte: Autoras.

**Figura 2.38 - Traçado da elipse na face lateral direita**



Fonte: Autoras.

sumário

Um exercício muito interessante, que pode ser realizado tanto com o procedimento que acabou de ser apresentado, quanto com o procedimento que será apresentado a seguir, consiste em representar a elipse em todas as faces de um OR.

**DICA IMPORTANTE!**

É possível determinar os pontos correspondentes aos pontos 5', 6', 7' e 8' do exemplo anterior sem que seja necessário representar um quadrado com uma circunferência circunscrita previamente. Para isso encontra-se o segmento AB, da figura 2.39, através da fórmula:  **$AB = r \cdot 0,3$** .

A justificativa desse procedimento se baseia no fato de que:

$$AB = OB - OA = r - r \cos(45^\circ)$$

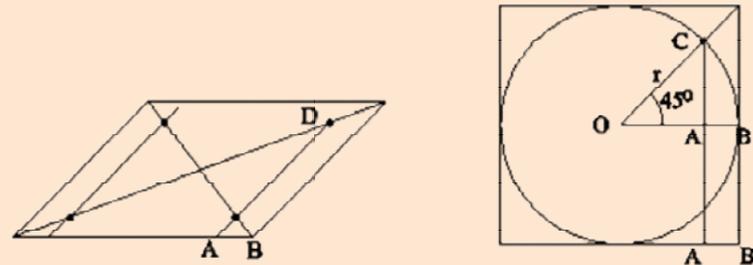
$$AB = r(1 - \cos(45^\circ)) = r(1 - 0,707)$$

$$AB = 0,293 \cdot r, \text{ ou seja, } AB = r \cdot 0,3$$

O ponto D do paralelogramo corresponde ao ponto C do quadrado.

É importante lembrar que o AB deverá ser colocado na mesma direção do raio utilizado. Assim, se o raio utilizado estiver na direção do eixo y e este pertencer a uma Cavaleira com K diferente de 1 o AB ficará proporcional.

**Figura 2.39 - Demonstração da fórmula para obtenção de AB**



Fonte: Costa, 2008.

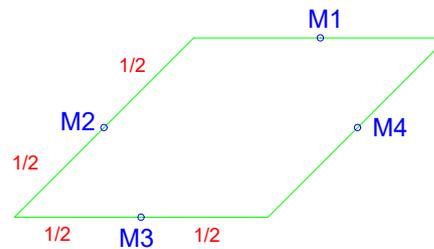
**b. Procedimento dos “n” pontos**

Como dito anteriormente existe outro procedimento para auxiliar a construção da elipse, o chamado procedimento dos “n” pontos.

Enquanto o procedimento anterior determina no máximo oito pontos da elipse, o procedimento que será apresentado agora permite a determinação de quantos pontos se desejar, ou seja, “n” pontos. Quanto mais pontos da elipse forem conhecidos, mais precisa será a construção da mesma, sobretudo se a representação for feita à mão livre. Portanto, a vantagem desse procedimento é uma representação mais exata da circunferência em perspectiva (elipse).

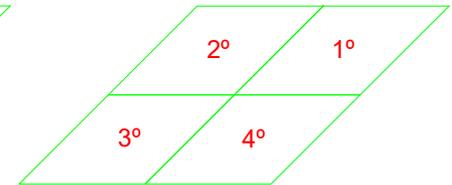
Para realizar o procedimento parte-se do paralelogramo que circunscribe a elipse que se quer construir. Em seguida, determinam-se os pontos médios dos lados do paralelogramo: M1, M2, M3 e M4 (figura 2.40). A partir desses pontos, divide-se o paralelogramo em quatro quadrantes, como mostra a figura 2.41.

Figura 2.40 - Paralelogramo com os pontos médios dos lados



Fonte: Autoras.

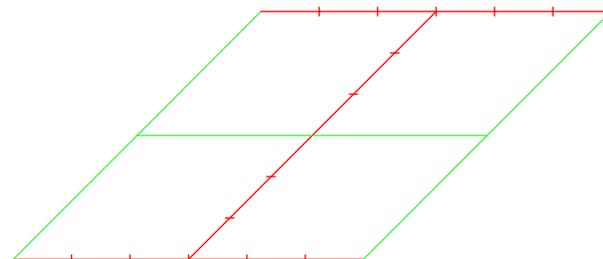
Figura 2.41 - Paralelogramo dividido em 4 quadrantes



Fonte: Autoras.

Dividem-se os seis segmentos destacados na figura 2.42 em qualquer quantidade de partes iguais (ver no quadro em destaque a seguir como dividir segmentos em partes iguais). Nesse exemplo, os segmentos foram divididos em três partes iguais. É muito importante que os segmentos sejam divididos no mesmo número de partes.

Figura 2.42 - Divisão dos lados dos quadrantes

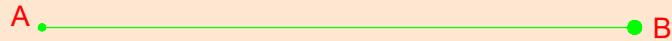


Fonte: Autoras.

### DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM PARTES IGUAIS

O segmento AB da figura 2.43 será dividido em “n” partes iguais.

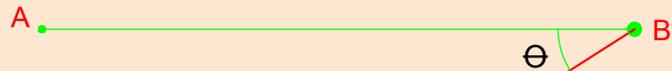
**Figura 2.43 - Segmento AB**



Fonte: Autoras.

Primeiro constrói-se uma linha auxiliar partindo de uma das extremidades do segmento AB, formando um ângulo qualquer com o segmento AB, figura 2.44.

**Figura 2.44 - Segmento AB com linha auxiliar**

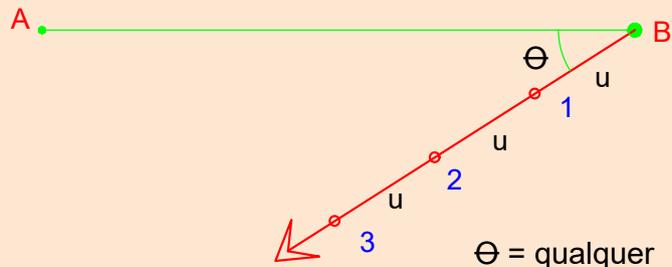


$\Theta = \text{qualquer}$

Fonte: Autoras.

Em seguida, divide-se a linha auxiliar no número de partes que se quer dividir o segmento AB (nesse exemplo o segmento será dividido em três partes iguais). Essa divisão pode ser feita com uma escala (régua) ou utilizando uma mesma abertura no compasso, como mostra a figura 2.45.

**Figura 2.45 - Divisão da linha auxiliar em 3 partes iguais**

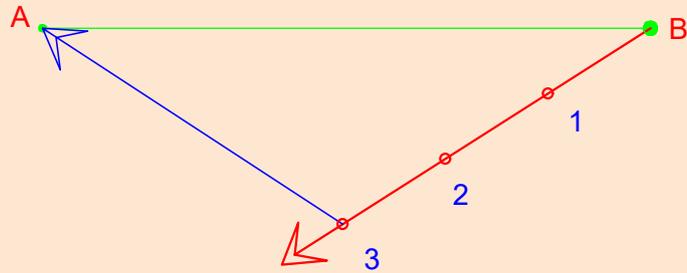


$\Theta = \text{qualquer}$

Fonte: Autoras.

Em seguida, liga-se a extremidade da última divisão à extremidade do segmento, nesse caso o ponto A, traçando assim o segmento 3A, como mostra a figura 2.46.

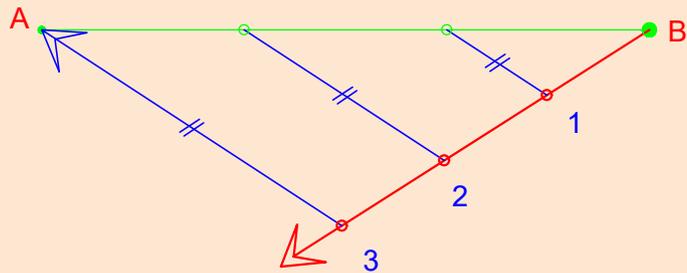
**Figura 2.46 - Ligação da extremidade da linha auxiliar à extremidade do segmento**



Fonte: Autoras.

Para finalizar deve-se traçar segmentos paralelos ao segmento 3A passando pelos pontos 1 e 2. Dessa maneira, os segmentos traçados irão interceptar o segmento AB dividindo-o em três partes iguais, como se vê na figura 2.47.

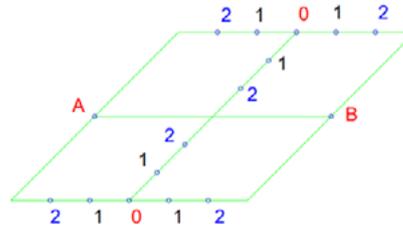
**Figura 2.47 - Divisão de um segmento em partes iguais**



Fonte: Autoras.

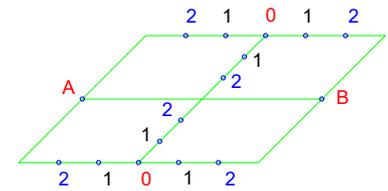
Não importa que largura, altura ou profundidade, tenha o paralelogramo que envolve a elipse (ver os diferentes paralelogramos nas figuras 2.48, 2.49 e 2.50) os dois segmentos que formam cada quadrante devem ser divididos no mesmo número de partes. Depois, enumeram-se os segmentos destacados da mesma forma como aparece nas figuras 2.48, 2.49 e 2.50.

Figura 2.48 - Divisão dos lados do quadrante no paralelogramo



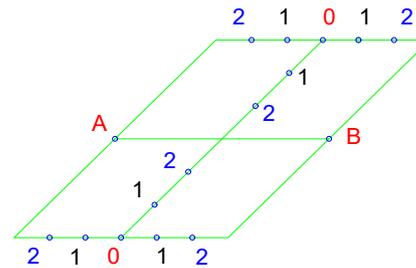
Fonte: Autoras.

Figura 2.49 - Divisão dos lados do quadrante no paralelogramo



Fonte: Autoras.

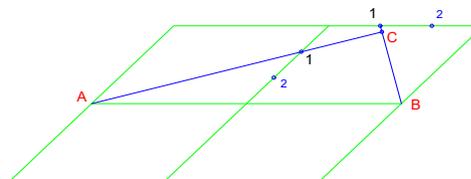
Figura 2.50 - Divisão dos lados do quadrante no paralelogramo



Fonte: Autoras.

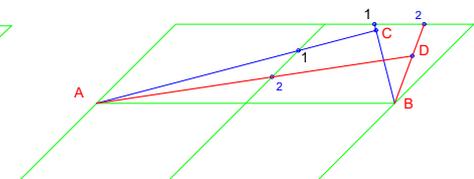
Para demonstrar como representar a elipse vamos realizar o procedimento no primeiro quadrante (Figura 2.51) e, depois, repeti-lo nos demais quadrantes.

Figura 2.51 - Procedimento no primeiro quadrante



Fonte: Autoras.

Figura 2.52 - Procedimento no primeiro quadrante

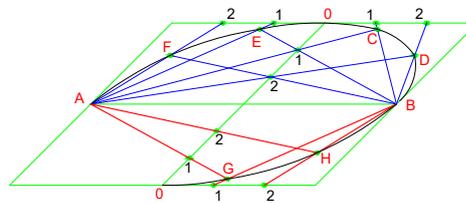


Fonte: Autoras.

Liga-se o **ponto A ao ponto 1 do segmento mais próximo** e o **ponto B ao ponto 1 do segmento horizontal**. O cruzamento do prolongamento dos segmentos A1 e B1 é um dos pontos da elipse, o ponto C. Para determinar mais um ponto no mesmo quadrante, repete-se a operação anterior ligando o **ponto A ao ponto 2 do segmento mais próximo** e o **ponto B ao ponto 2 do segmento horizontal**, o cruzamento do prolongamento dos segmentos A2 e B2, resulta no ponto D (figura 2.52).

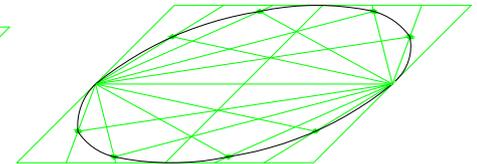
Repete-se o procedimento nos quatro quadrantes. A figura 2.53 mostra esse processo em andamento; a figura também mostra o traçado da curva, que é feito à mão livre. Para esse traçado, inicia-se no ponto B (que é um dos pontos de tangência da elipse com o quadrilátero que a circunscreve), e segue-se traçando o arco de elipse até o ponto D. Em seguida, segue-se ao ponto C e finaliza-se o arco de elipse no ponto O (que é outro ponto de tangência da elipse com quadrilátero que a circunscreve). Para traçar a elipse nos outros quadrantes, inicia-se o traçado em um dos pontos de tangência da elipse e procede-se analogamente, como mostra a figura 2.53. A elipse completa fica como na figura 2.54.

**Figura 2.53 - Procedimento no quarto quadrante**



Fonte: Autoras.

**Figura 2.54 - Elipse completa**



Fonte: Autoras.

# 3

**ISOMETRIA:**

projeção  
cilíndrica  
ortogonal

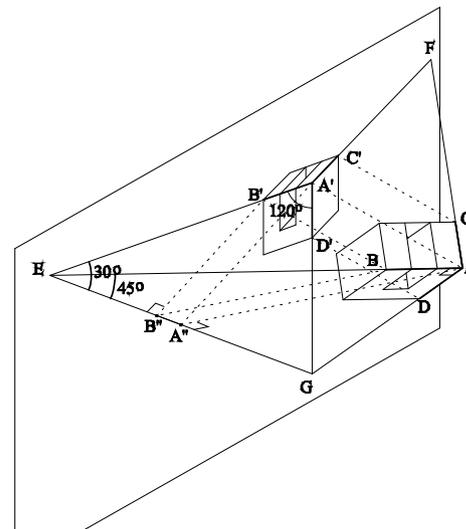
### 3.1 CARACTERIZAÇÃO DA AXONOMETRIA

A Isometria faz parte de um sistema de representação chamado **Axonometria**. Conforme foi explicitado no Capítulo 1, os sistemas de representação se diferenciam por duas características:

1. **Tipo de projeção:** cônica ou cilíndrica (ortogonal ou oblíqua);
2. Posição de **Ortoedro de Referência (OR)** com relação ao plano de projeção.

Na Axonometria a projeção é **cilíndrica ortogonal**, ou seja, as retas projetantes são paralelas entre si e formam um ângulo de  $90^\circ$  com o plano de projeção. Nesse sistema de representação o Ortoedro de Referência (OR) está posicionado de tal maneira com relação ao plano de projeção que se as três arestas que partem de um mesmo vértice, no caso da figura 3.1, o vértice A, forem prolongadas, todas encontrarão o plano de projeção. No caso da figura 3.1 isso ocorrerá nos pontos E, F e G.

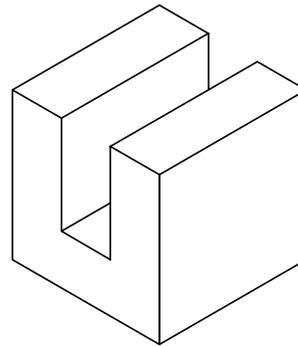
Figura 3.1 - Projeção de objeto em Isometria



Fonte: Costa, 2008.

Quando todas as faces do objeto são projetadas no plano de projeção obtém-se uma imagem como mostra a figura 3.2. Como não existem faces paralelas ao plano de projeção, pois estão todas oblíquas em relação a ele, não existe nenhuma face em VG, ou seja, as três faces sofrem deformação ao serem projetadas.

Figura 3.2 - Representação em Isometria de um objeto

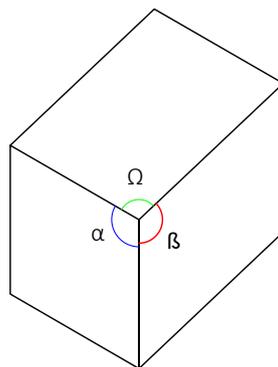


Fonte: Autoras.

A depender da posição exata do objeto em relação ao plano de projeção as faces são projetadas com angulações segundo três tipos de situação:

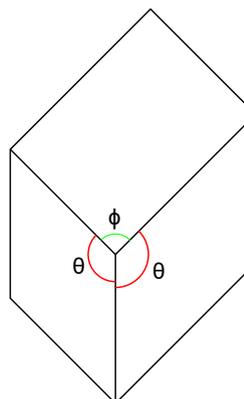
- A. Cada face é projetada em um ângulo diferente, nesse caso tem-se a **Trimetria**, onde as faces que têm maiores ângulos têm menos destaque (ver figura 3.3);
- B. Duas faces são projetadas com o mesmo ângulo e a terceira face é projetada com um ângulo diferente. Assim tem-se a **Dimetria**, ou Bimetria, onde duas faces terão mais destaque do que a outra (ver figura 3.4);
- C. As três faces são projetadas com o mesmo ângulo, dessa forma tem-se a **Isometria**, onde as três faces sofrem a mesma deformação. O ângulo que as faces fazem com o plano de projeção é igual a  $120^\circ$  (pois  $360^\circ/3 = 120^\circ$ , ver figura 3.5).

Figura 3.3 - Objeto em Trimetria



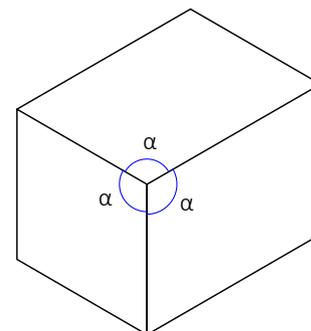
Fonte: Autoras.

Figura 3.4 - Objeto em Dimetria



Fonte: Autoras.

Figura 3.5 - Objeto em Isometria



Fonte: Autoras.

## 3.2 OBSERVADOR, OBJETO E PLANOS DE PROJEÇÃO

No primeiro capítulo deste livro, foram estudados os elementos que compõem um sistema de projeção. A Projeção Cilíndrica Ortogonal Axonométrica terá os elementos que a compõem e a determinam da seguinte maneira:

1. **Observador:** tende ao infinito, por se tratar de um sistema cilíndrico;
2. **Projetantes:** partem dos olhos do observador e encontram o plano de projeção ortogonalmente;
3. **Objeto e OR:** o OR, que envolve o objeto, possui face frontal **oblíqua** ao plano de projeção. A definição do ângulo de obliquidade define o tipo de axonometria: Isometria (figura 3.3), Bimetria, ou Dimetria (figura 3.4) e Trimetria (figura 3.5), neste livro será abordada apenas a Isometria, em seu modo simplificado (ver itens a seguir);
4. **Plano de projeção:** na Axonometria há apenas um plano de projeção;

5. **Imagem:** produto final da projeção, representação do objeto.

É importante lembrar que tais elementos são comuns a todas as projeções, porém adquirem diferentes posições um em relação ao outro. São exatamente as posições relativas que irão determinar que tipo de projeção será gerada.

### 3.3 CARACTERIZAÇÃO DA ISOMETRIA

Dentre as projeções axonométricas, a Isometria é a mais utilizada. O termo isométrico significa: “iso” = igualdade e “métrico” = medida. Nas representações com projeção isométrica, o objeto está oblíquo em relação ao plano de projeção, conforme mostra a figura 3.1. Essa obliquidade em relação ao plano de projeção faz com que a projeção das dimensões do objeto sejam deformadas (reduzidas) igualmente em cada direção dos eixos.

Dessa maneira, na Isometria, todas as arestas da peça que estão paralelas às arestas do OR (AB, AC ou AD) (ver figura 3.1) têm a mesma inclinação em relação ao plano de projeção. Portanto, as projeções ortogonais dessas arestas têm a mesma deformação (nesse caso, chamada de **redução natural**). Na figura 3.1 os pontos E, F e G são as interseções dos prolongamentos das arestas AB, AC e AD com o plano de projeção. Traçando por A e B perpendiculares a EG determina-se o segmento A'' B'':

$$A''B'' = AB \times \cos(45^\circ) = A'B' \times \cos(30^\circ)$$

$$A'B' = \cos(45^\circ) / \cos(30^\circ) \times AB = 0,816 \times AB$$

Sendo assim, a representação da projeção fica como a figura 3.1, ou seja, com todas as arestas reduzidas com relação à peça real.

$$A'B' = 0,816 \times AB$$

$$A'C' = 0,816 \times AC$$

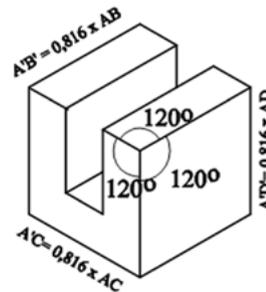
$$A'D' = 0,816 \times AD$$

### 3.4 ISOMETRIA SIMPLIFICADA

Isometria Simplificada ou Desenho Isométrico são representações simplificadas de uma Axonometria Isométrica, sendo muito utilizada para o ensino de conteúdos introdutórios de representação gráfica e para a representação em *softwares* gráficos. Nesse tipo de representação o coeficiente de redução natural da Axonometria Isométrica, visto no item anterior, não é considerado.

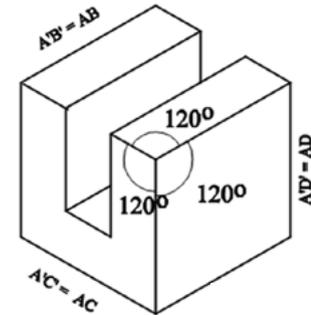
Observe nas figuras 3.6 e 3.7 a diferença entre a Isometria Exata e a Isometria Simplificada. A **Isometria Simplificada**, figura 3.7, é maior do que a Isometria Exata, figura 3.6, porque não há redução das arestas.

Figura 3.6 - Isometria Exata



Fonte: Costa, 2008.

Figura 3.7 - Isometria Simplificada

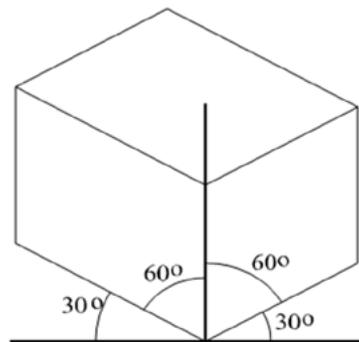


Fonte: Costa, 2008.

**Repetindo:** na Isometria Simplificada as projeções das arestas não sofrem a redução natural de 0,816 ( $A'B' = AB$ ,  $A'C' = AC$  e  $A'D' = AD$ ).

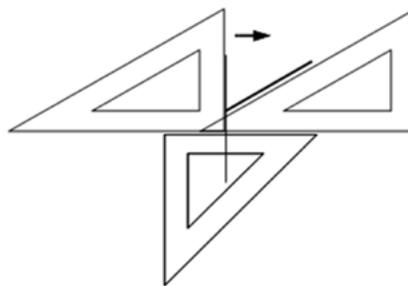
Na prática, a construção do OR em **Isometria Simplificada** começa com a representação de uma linha horizontal que vai servir como referência. Em seguida é escolhido um ponto qualquer nessa linha para que a partir dele se representem duas linhas formando  $30^\circ$  com a linha horizontal (ver figura 3.8). Para isso, posiciona-se os esquadros como indicado nas figuras 3.9 e 3.10.

Figura 3.8 - Construção do OR em Isometria Simplificada



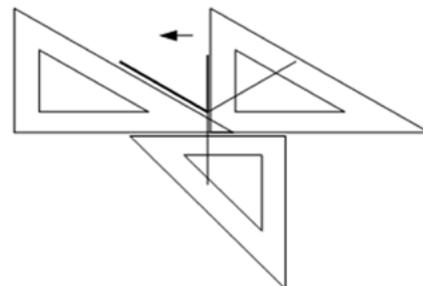
Fonte: Costa, 2008.

Figura 3.9 - Construção da isometria com os esquadros



Fonte: Costa, 2008.

Figura 3.10 - Construção da isometria com os esquadros



Fonte: Costa, 2008.

Determine-se, então, a altura, a largura e a profundidade da peça nos eixos coordenados correspondentes. Procede-se com o traçado de retas paralelas às retas traçadas nas figuras 3.9 e 3.10 para completar a representação do OR.

### 3.5 EIXOS COORDENADOS E ORTOEDRO DE REFERÊNCIA

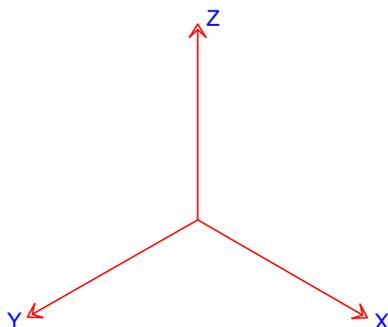
Da mesma forma como foi demonstrado para a Cavaleira, visualiza-se as peças representadas com mais facilidade quando relaciona-se suas dimensões com os eixos coordenados.

Ao se pensar que tudo à nossa volta possui três dimensões, a transposição do objeto real para o objeto representado no papel é facilitada. Dessa maneira, tem-se o eixo das larguras, o eixo  $x$ ; o eixo das profundidades, o eixo  $y$  e o eixo das alturas, o eixo  $z$ .

A figura 3.11 mostra como fica a posição dos eixos coordenados na Isometria Simplificada. Na literatura, o eixo  $z$  sempre aparece localizado verticalmente, porém, não há um consenso com relação ao posicionamento dos eixos coordenados  $x$  e  $y$ . Algumas vezes é adotado o eixo  $x$  posicionado à esquerda e o eixo  $y$  à direita. No entanto, muitos autores da área (BORTOLUCCI, 2005; COSTA; COSTA, 1996; COSTA, 2008,) adotam o eixo  $x$  posicionado à direita e o eixo  $y$  à esquerda. Nesse livro adotaremos esse último posicionamento, mostrado na figura 3.11.

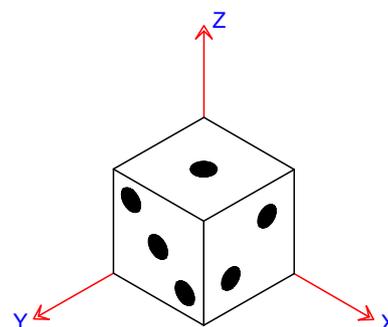
A representação padrão, utilizada nesse livro, exhibe o objeto como na figura 3.12, que mostra um dado representado em Isometria e referenciado pelos eixos coordenados. A face que contém o número 1 (um) do dado corresponde à **vista superior** do OR; a face que contém o número 3 (três) do dado corresponde à **vista frontal** do OR e, conseqüentemente, a face que contém o número 2 (dois) do dado corresponde à **vista lateral direita** do OR. **Todas as peças representadas em Isometria Simplificada seguirão essa mesma convenção.**

Figura 3.11 - Representação esquemática dos três eixos coordenados em Isometria



Fonte: Autoras.

Figura 3.12 - Dado representado em Isometria



Fonte: Autoras.

### 3.5.1 Visualização de todas as faces

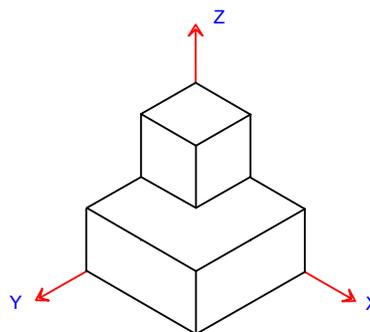
A exemplo da Cavaleira, na Isometria Simplificada são sempre mostradas três vistas do OR. Na figura 3.13 foram mostradas as vistas: superior, frontal e lateral direita, sendo esta a forma mais usual de apresentação da Isometria. No entanto, é possível, mostrar as outras vistas do objeto. Nesse caso, é possível ter as seguintes combinações:

- Frontal, lateral direita e superior (padrão);
- Frontal, lateral esquerda e superior;
- Frontal, lateral direita e inferior; e
- Frontal, lateral esquerda e inferior.

Dada a peça da figura 3.13, representada em Isometria Simplificada, que mostra as vistas: frontal, superior e lateral direita do OR, é possível

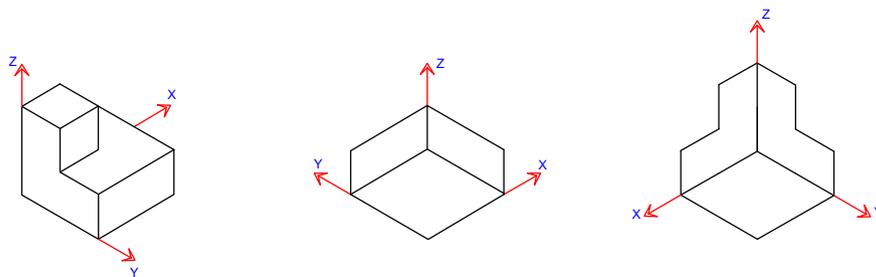
representá-la de forma a mostrar as outras faces da peça, conforme mostram as peças da figura 3.14. Nesse caso, é necessário rotacionar a peça em torno de algum dos eixos coordenados ou variar a posição do eixo y, como foi visto para a Cavaleira.

Figura 3.13 - Representação das vistas frontal, lateral direita e superior (default) do objeto



Fonte: Autoras.

Figura 3.14 - Três representações do mesmo objeto variando as vistas



Fonte: Autoras.

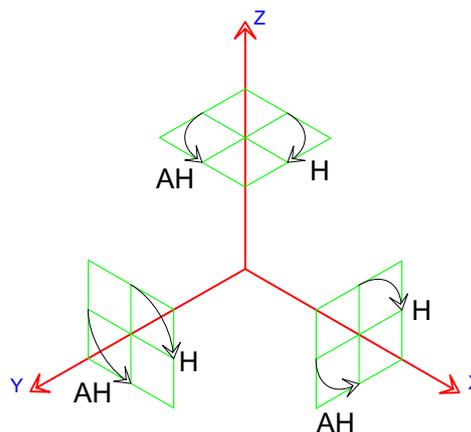
### 3.5.2 Rotação da peça

Na Isometria Simplificada a rotação de uma peça pode ocorrer da mesma maneira como foi visto na Cavaleira. Porém, deve ser observada a posição dos eixos coordenados.

Dessa forma, a rotação depende:

1. Do eixo escolhido como referência: x, y ou z;
2. Do sentido da rotação, se horário (H) ou anti-horário (AH);
3. Da amplitude, em graus, da rotação.
4. A figura 3.15 mostra como fica a rotação para cada um dos eixos coordenados.

Figura 3.15 - Rotação nos eixos coordenados em Isometria



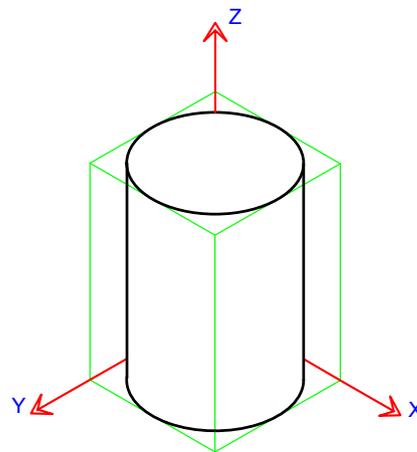
Fonte: Autoras.

### 3.6 CILINDROS E CONES

As propriedades geométricas dos cilindros e cones não se alteram em função do tipo de representação escolhida. Assim, a conceituação para leis de geração e geratrizes de limite de visibilidade se aplicam para a Isometria Simplificada da mesma forma como foi visto para a representação da Cavaleira.

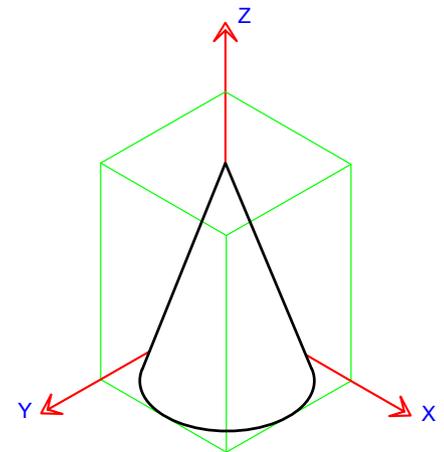
Na representação do cilindro e do cone em Isometria Simplificada as faces que têm forma de circunferência, quando são representadas em duas dimensões sempre irão tomar forma de **elipse**, porque no caso da Isometria Simplificada nenhuma das faces do OR está paralela ao plano de projeção (ver figuras 3.16 e 3.17).

Figura 3.16 - Representação do cilindro em Isometria Simplificada



Fonte: Autoras.

Figura 3.17 - Representação do cone em Isometria Simplificada

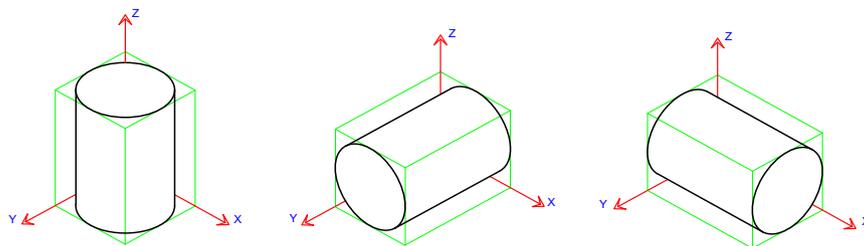


Fonte: Autoras.

O cilindro pode assumir três posições básicas na Isometria Simplificada com relação aos eixos coordenados. Na figura 3.18, é possível ver que na primeira representação a face plana do cilindro está representada

de forma paralela aos eixos  $x$  e  $y$ . Já na segunda representação, a face plana do cilindro está paralela aos eixos  $x$  e  $z$ . Por último, na terceira representação, a face plana do cilindro está representada paralela aos eixos  $y$  e  $z$ .

Figura 3.18 - Três posições básicas do cilindro na Isometria Simplificada



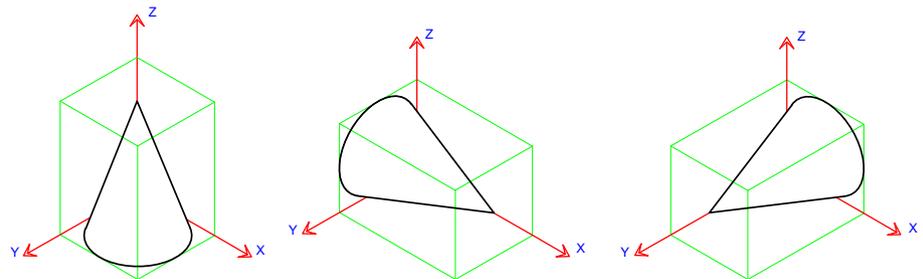
Fonte: Autoras.

#### ATENÇÃO!

Tanto na Isometria Exata quanto na Simplificada a circunferência **sempre** toma forma de elipse, não importa a que eixos a face em forma de circunferência esteja paralela. Isso ocorre porque em Isometria todos ou eixos estão oblíquos com relação ao plano de projeção.

Pode-se aplicar para os cones o mesmo que foi visto para os cilindros, uma vez que as situações são semelhantes. Na figura 3.19, a primeira representação traz um cone cuja face plana está paralela aos eixos  $x$  e  $y$ . Sendo assim, ocorrerá o mesmo que aconteceu com o cilindro, ou seja, a face em forma de circunferência vai aparecer como uma elipse. Na segunda representação, a face plana do cone está paralela aos eixos  $y$  e  $z$ , e a exemplo do cilindro, também se torna uma elipse. Já na última representação a face plana do cone está paralela aos eixos  $x$  e  $z$ .

Figura 3.19 - Três posições básicas do cone na Isometria Simplificada



Fonte: Autoras.

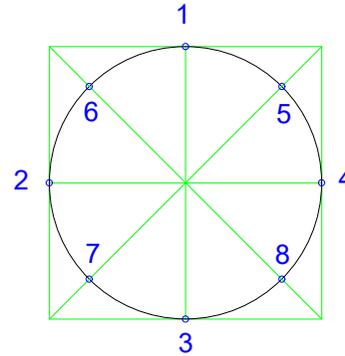
### 3.6.1 Representação da elipse e da oval regular de quatro centros

A exemplo da Cavaleira, na Isometria Simplificada, existem alguns procedimentos para facilitar o traçado da elipse, estudaremos três deles. Os dois primeiros tipos são semelhantes aos procedimentos já vistos para a Cavaleira: o traçado da elipse com 8 pontos, usando as diagonais e o traçado da elipse com “n” pontos, usando a divisão do quadrilátero em quadrantes. O terceiro procedimento, que é a representação da oval regular de quatro centros, não é utilizado na Cavaleira, ele é utilizado apenas nas Isometrias.

#### a. Procedimento dos 8 pontos

Para representar a elipse em Isometria Simplificada, a exemplo do que foi aprendido para a Cavaleira, serão utilizados parâmetros que valem para uma circunferência inscrita em um quadrilátero. Por essa razão mostramos novamente a figura 2.34 que traz os 8 pontos definidos após procedimentos discutidos no capítulo anterior.

Figura 2.34 - Intersecção da circunferência com a diagonal nos pontos 5, 6, 7 e 8



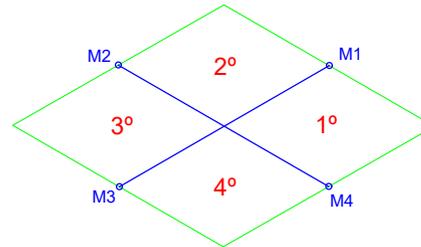
Fonte: Autoras.

Esses mesmos parâmetros são transpostos para realizar a representação da elipse em Isometria Simplificada. O primeiro procedimento consiste na representação do paralelogramo em Isometria Simplificada, mostrado na figura 3.20. Parte-se de alguns princípios representados na figura mencionada:

1. A elipse será representada de forma inscrita no paralelogramo;
2. Serão determinados 4 pontos de tangência no paralelogramo, os quais coincidem com os pontos médios dos seus lados, os pontos M1, M2, M3 e M4, que equivalem aos pontos 1, 2, 3 e 4 da figura 2.34;
3. Ao ligarmos o ponto M1 ao ponto M3 e o ponto M2 ao ponto M4, dividimos o paralelogramo em 4 quadrantes.

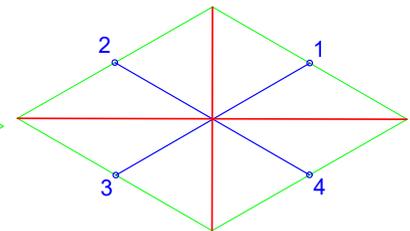
O segundo procedimento consiste em encontrar os outros 4 pontos, equivalentes aos pontos 5, 6, 7 e 8, da figura 2.34, definindo, então, os 8 pontos do procedimento em estudo. Para isso serão traçadas as diagonais do paralelogramo, como mostra a figura 3.21.

Figura 3.20 - Paralelogramo com os pontos médios dos lados e divisão em quadrantes



Fonte: Autoras.

Figura 3.21 - Diagonais do paralelogramo e pontos 1, 2, 3 e 4

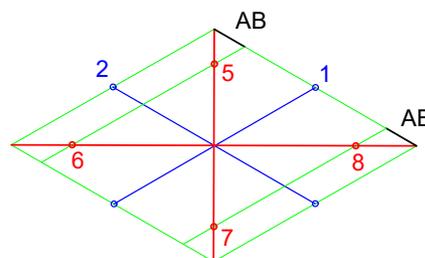


Fonte: Autoras.

Para determinar os pontos 5, 6, 7 e 8, não é necessário representar a circunferência. Como ocorre na figura 2.34 é suficiente utilizar o parâmetro:  $AB = r \cdot 0,3$ , da mesma forma como foi visto na Cavaleira, ou seja, mede-se o raio, o mesmo é multiplicado por 0,3 e descobre-se o tamanho do segmento AB.

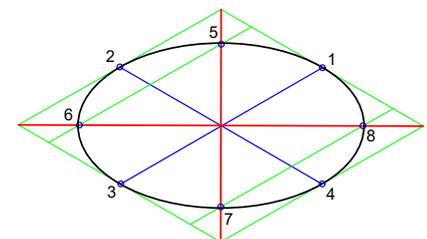
Em seguida, posiciona-se o segmento AB nas duas extremidades de um dos lados do paralelogramo e, assim, determinam-se os pontos 5, 6, 7 e 8, conforme a figura 3.22. Para determinar a elipse traça-se uma curva à mão livre prestando bastante atenção para que essa passe por todos os pontos determinados (ver figura 3.23).

Figura 3.22 - Determinação dos pontos 5, 6, 7 e 8



Fonte: Autoras.

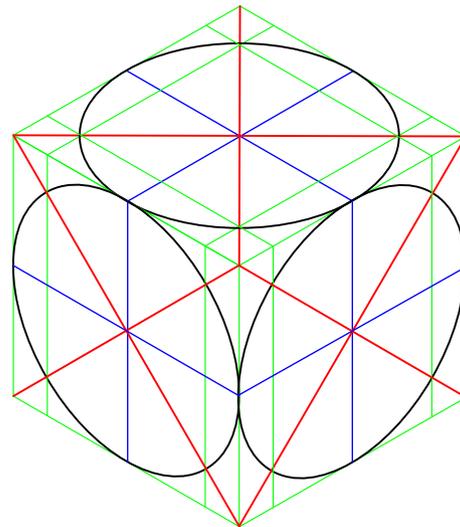
Figura 3.23 - Traçado da elipse



Fonte: Autoras.

Um exercício muito interessante e que ajuda a fixar os conhecimentos aprendidos até o momento, é representar a elipse em todas as faces do OR, como mostra a figura 3.24.

**Figura 3.24 - Representação da elipse em todas as faces do Ortoedro de Referência**



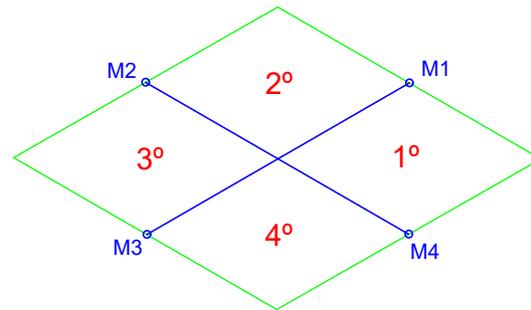
Fonte: Autoras.

**b. Procedimento dos “n” pontos**

O outro procedimento, denominado Procedimento dos “n” pontos, que foi demonstrado para a Cavaleira, também pode ser utilizado na Isometria Simplificada. Ele permite determinar não apenas 8, mas sim inúmeros pontos da elipse. Essa é a vantagem da utilização desse procedimento, pois quanto mais pontos forem utilizados para dar suporte ao traçado da curva à mão livre, mais precisa ficará a representação da curva.

A figura 3.20, já utilizada para explicar o procedimento anterior, também servirá como ponto de partida para a execução do Procedimento dos “n” pontos.

Figura 3.20 - Paralelogramo com os pontos médios dos lados e divisão em quadrantes



Fonte: Autoras.

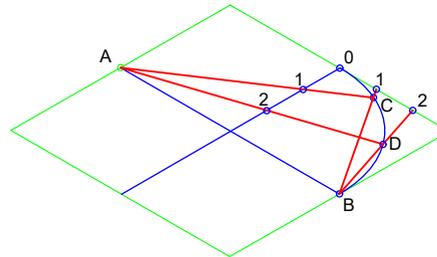
Os quadrantes são trabalhados um a um, como mostram as figuras 3.25 e 3.26. Para demonstrar como representar a elipse realiza-se o procedimento no primeiro quadrante e depois repete-se o procedimento nos demais quadrantes. Como mostra a figura 3.25, duas as laterais do primeiro quadrante são divididas em um número igual de partes. Nesse exemplo dividiu-se ambos os segmentos em três partes iguais. É muito importante que os dois segmentos que formam cada quadrante sejam divididos no mesmo número de partes.

Liga-se o ponto A ao **ponto 1** do **segmento mais próximo** e o ponto B ao **ponto 1** do outro **segmento**, o cruzamento do prolongamento dos segmentos A1 e B1 será um dos pontos da elipse, o ponto C (observar a figura 3.25). Para determinar mais um ponto no mesmo quadrante, liga-se o ponto A ao **ponto 2** do **segmento mais próximo** e o ponto B ao **ponto 2** do outro **segmento**, o cruzamento do prolongamento dos segmentos A2 e B2 será outro ponto da elipse, o ponto D. Já é possível traçar, à mão livre, um arco de elipse nesse quadrante, como mostra a figura 3.25.

Para fazer isso inicia-se o traçado no ponto B (que é um ponto de tangência da elipse no quadrilátero envolvente), segue-se traçando o arco de elipse até o ponto D e depois ao ponto C e finaliza-se o arco de elipse no ponto O (que também é um ponto de tangência da elipse no quadrilátero envolvente).

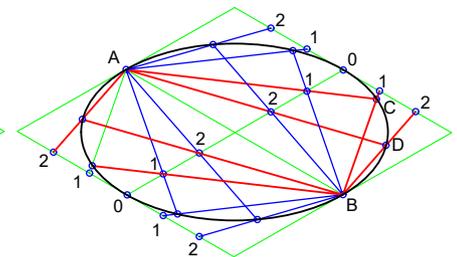
Quando esse procedimento é repetido nos outros três quadrantes o resultado é como o da figura 3.26.

Figura 3.25 - Determinação dos pontos C e D



Fonte: Autoras.

Figura 3.26 - Traçado da elipse



Fonte: Autoras.

### c. Representação da oval regular de quatro centros

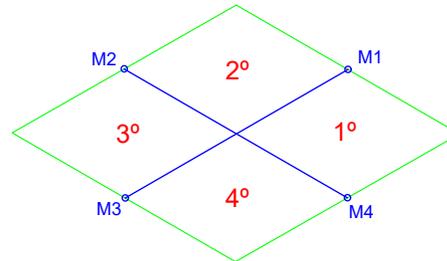
No caso da Isometria, a representação da elipse pode ser realizada utilizando uma curva chamada de **oval regular de quatro centros**. Como a oval é muito semelhante à elipse, ela também é conhecida como “falsa elipse”.

Muitas pessoas preferem representar a oval a representar uma elipse, porque ela pode ser representada totalmente com instrumentos (esquadros e compasso), eliminando assim a parte do traçado à mão livre que precisa ser feita quando se representa uma elipse.

Para representar a oval parte-se novamente da figura 3.20, a qual traz a divisão do quadrilátero em quatro quadrantes. Sendo os pontos M1, M2, M3 e M4 os pontos médios dos lados do paralelogramo. Ao final do procedimento serão representados com o compasso quatro arcos de circunferências com quatro centros diferentes, sendo um em cada quadrante. O primeiro centro de arco, o ponto C1, é definido em um dos vértices de maior

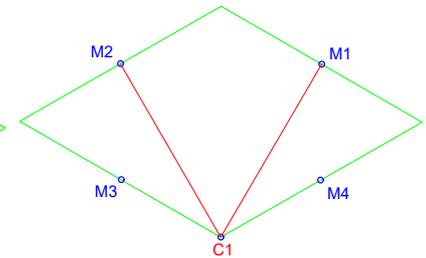
ângulo do quadrilátero. A partir de C1, são traçados dois segmentos de reta ligando-o aos pontos médios dos lados opostos M1 e M2 (ver figura 3.27).

Figura 3.20 - Paralelogramo com os pontos médios dos lados e divisão em quadrantes



Fonte: Autoras.

Figura 3.27 - Traçado dos segmentos C1M1 e C1M2



Fonte: Autoras.

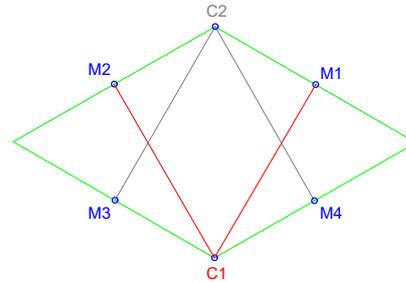
O procedimento que acaba de ser descrito é repetido no vértice oposto. Dessa maneira, tem-se o segundo centro da oval, o ponto C2. A partir de C2 são traçados mais dois segmentos de reta ligando-o aos pontos médios dos lados opostos M3 e M4, como mostra a figura 3.28.

O cruzamento de C1M1 com C2M4 gera o ponto C3, que é o terceiro centro da oval. Da mesma forma, o cruzamento de C1M2 com C2M3 gera o ponto C4, que será o quarto centro que compõe a oval (ver figura 3.29). Agora já é possível traçar a oval.

Resumindo:

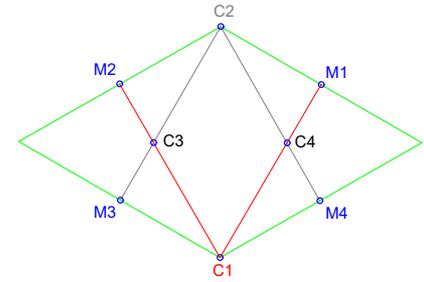
1. C1 e C2 são centros de dois arcos **maiores** de mesmo raio;
2. C3 e C4 são centros de dois arcos **menores** de mesmo raio;
3. Todos os arcos começam e terminam nos pontos médios do quadrilátero.

**Figura 3.28 - Traçado dos segmentos C2M3 e C2M4**



Fonte: Autoras.

**Figura 3.29 - Determinação dos pontos C3 e C4**

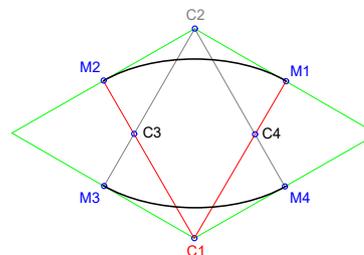


Fonte: Autoras.

Para traçar a oval regular de quatro centros basta colocar a ponta seca do compasso em C1 e fazer uma abertura (raio) até M1, em seguida, traçar um arco até M2. De forma semelhante, mantendo a mesma abertura (raio), centrar a ponta seca do compasso em C2 e traçar um arco de M3 até M4, conforme mostra a figura 3.30.

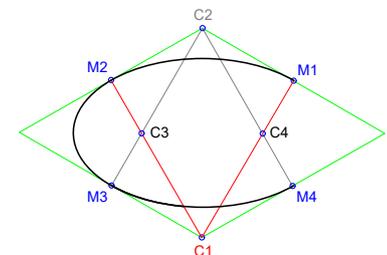
Para concluir a oval, centra-se a ponta seca do compasso em C3, faz-se uma abertura (raio) até M2 e traça-se um arco até M3, ver figura 3.31. De forma semelhante, mantendo a mesma abertura (raio), centra-se a ponta seca do compasso em C4 e traça-se um arco de M1 até M4, conforme mostra a figura 3.32.

**Figura 3.30 - Traçado dos arcos M1M2 e M3M4**



Fonte: Autoras.

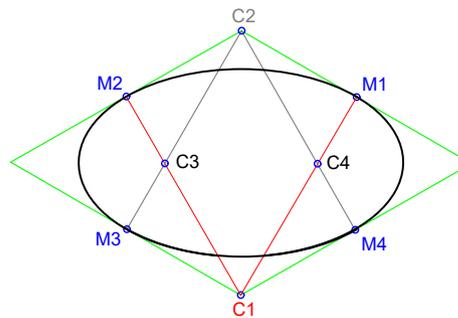
**Figura 3.31 - Traçado do arco M2M3**



Fonte: Autoras.

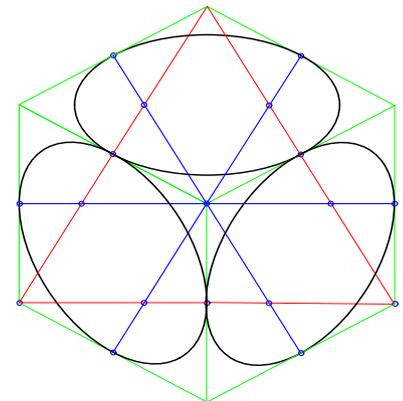
Um exercício muito interessante, e que ajuda a fixar os conhecimentos aprendidos, é representar a oval regular de quatro centros em todas as faces do OR, como na figura 3.33.

Figura 3.32 - Traçado do arco M1M4



Fonte: Autoras.

Figura 3.33 - Representação da elipse em todas as faces do Ortoedro de Referência



Fonte: Autoras.

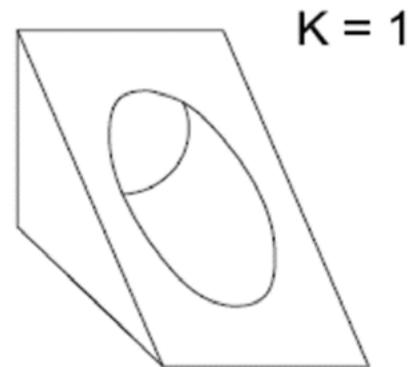
### 3.7 FURO CILÍNDRICO

A ideia de realizar um furo em uma peça é muito útil e importante para qualquer campo da Engenharia. Por exemplo, na Engenharia Mecânica essa ideia é fundamental quando se trabalha com encaixes.

Perfurar uma peça é retirar dela uma parte. Essa parte retirada pode vaziar toda a peça ou apenas parte desta. Para furar, cavar ou vaziar deve-se pensar em uma primeira peça, a qual se quer furar, e em uma segunda peça, que terá a forma da parte que se quer retirar da primeira. Dessa maneira, introduz-se a segunda peça na primeira de forma a retirar desta um determinado volume.

Ao se perfurar uma peça, na verdade cria-se um vazio na peça perfurada e esse vazio é representado por novas arestas. Os furos podem ter diferentes formatos. No exemplo da figura 3.34, o formato do furo é cilíndrico, no entanto ele poderia ser prismático.

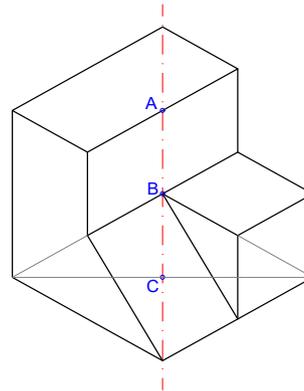
Figura 3.34 - Exemplo de furo cilíndrico



Fonte: Costa, 2008.

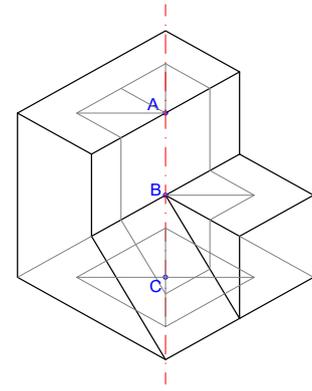
Para representar um furo em uma peça deve-se proceder o entendimento dessa interseção plano a plano, ou face a face da peça. Ver o exemplo da inserção de um furo cilíndrico na peça abaixo. A figura 3.35 mostra a peça antes do furo com o eixo do mesmo que passa pelos pontos A (localizado na face superior do OR), B (localizado no centro geométrico da peça) e C (localizado na face inferior do OR). Tais pontos representam a interseção do eixo que é perpendicular às faces superior e inferior da peça com cada face (plano) que é tocada por ele. Imagine-se, então, em cada um desses pontos um plano perpendicular ao eixo e que pertença à face da peça. A figura 3.36 mostra esses planos nos quais será feita a inserção do furo em cada face da peça.

Figura 3.35 - Peça antes do furo



Fonte: Autoras.

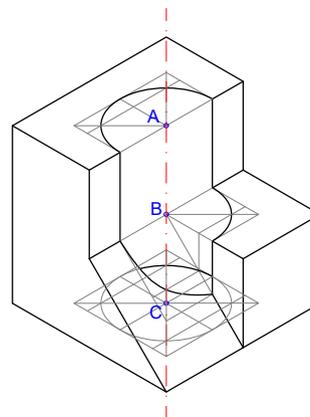
Figura 3.36 - Planos em que serão representadas as curvas do furo



Fonte: Autoras.

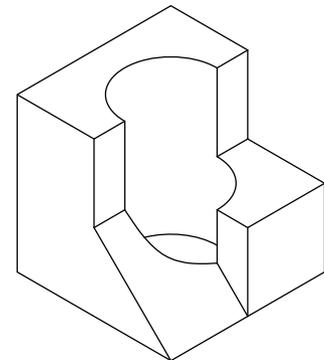
A figura 3.37 mostra os planos com as curvas que correspondem às novas arestas geradas pela perfuração da peça. Finalmente, a figura 3.38 mostra a peça perfurada.

Figura 3.37 - Aplicação do procedimento dos 8 pontos para a construção das curvas do furo



Fonte: Autoras.

Figura 3.38 - Furo perfurando toda a peça



Fonte: Autoras.

# 4

## SISTEMA DE VISTAS:

projeção  
cilíndrica  
ortogonal

## 4.1 INTRODUÇÃO

O sistema de representação chamado Sistema de Vistas pressupõe a representação de objetos tridimensionais por meio de uma dupla projeção cilíndrica ortogonal. Tal sistema tem como arcabouço teórico a Geometria Descritiva, que é considerada a parte da Matemática que tem como finalidade “representar no plano as figuras do espaço, de modo a podermos, com o auxílio da Geometria Plana, estudar suas propriedades e resolver os problemas relativos às mesmas” (MACHADO, 1976, p. 11).

O sistema de representação criado por Gaspard Monge (1746-1818) possibilita a representação de um objeto qualquer garantindo que suas propriedades angulares e lineares sejam resguardadas. Isso permite a representação, fabricação e/ou construção precisa de qualquer objeto. Dessa maneira é possível expressar, comunicar, antecipar e resolver problemas relativos aos objetos reais, de diversas áreas do saber que trabalham e estudam a Forma através da sua representação antes mesmo que esses objetos sejam construídos. Tal fato trouxe um significativo aumento na eficiência dos processos produtivos na Europa, estimulando tanto a Engenharia Militar quanto a Revolução Industrial.

**Figura 4.1 - Gaspard Monge (1746-1818)**



Fonte: Wikimedia Commons – Picryl, 2022<sup>1</sup>.

1 Disponível em: <https://picryl.com/media/gaspard-monge-litho-delpesch-7af94f>. Acesso em: 02 ago. 2022.

Gaspard Monge, cuja foto aparece na figura 4.1, é considerado o criador da Geometria Descritiva e grande teórico da Geometria Analítica. Ele viveu na França em meados do século XVIII, era uma pessoa que gostava das ciências exatas (física, matemática e geometria) e que possuía o que chamamos atualmente de inteligência espacial, ou seja, ele facilmente visualizava relações espaciais complexas. Foi um dos fundadores da Escola Politécnica Francesa e também lecionou na Escola Militar Mezières, tornando-se um acadêmico de renome.

Como também era um cidadão engajado politicamente, seus conhecimentos também contribuíram para a Engenharia Militar. Em seus estudos, Monge elaborou o arcabouço teórico que possibilitou o avanço bélico francês. Além disso, criou um método baseado na aritmética e em operações espaciais que tornou a artilharia francesa muito mais eficiente. A mudança foi tão significativa que seu método foi considerado segredo de Estado durante anos.

Outro exemplo de sua contribuição foi durante a Revolução Francesa, quando houve a necessidade de se produzir uma grande quantidade de canhões e de pólvora num curto espaço de tempo. Monge liderou a produção e acabou elaborando um boletim, chamado *A Arte da Fabricação do Canhão*, o qual se tornou o manual das fábricas. Neste boletim ele traduziu seu raciocínio espacial do ambiente militar e estratégico para o ambiente da produção de produtos em larga escala. Hoje, podemos dizer que ele criou uma linguagem gráfica universal, a linguagem do Desenho Técnico. Essa linguagem possibilitou a transmissão de informação sobre objetos tridimensionais com a precisão necessária para a execução dos mesmos. De fato, a linguagem Mongeana permitiu que fábricas fossem estruturadas não só na França, mas ao redor do mundo e que os produtos deixassem de ser fabricados nos quintais dos artesãos e passassem a ser produzidos em larga escala.

## sumário

## 4.2 CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA DE VISTAS MONGEANAS

Nos capítulos anteriores desse livro vimos que as representações, ou projeções de objetos em um sistema projetivo se diferenciam em função de dois aspectos:

1. Tipo de projeção: cônica ou cilíndrica (ortogonal ou oblíqua); e
2. Posição do Ortoedro de Referência (OR) em relação ao plano de projeção.

No caso do Sistema de Vistas, o objeto é projetado em pelo menos dois planos de projeção, diferentemente da Cavaleira e da Isometria Simplificada, onde a projeção é realizada em apenas em um plano de projeção. Por essa razão o Método de Monge também é chamado de “Método da Dupla Projeção Ortogonal”.

É possível afirmar ainda que, com relação ao tipo de projeção, o Sistema de Vistas é do tipo **Projeção Cilíndrica Ortogonal**, o que significa dizer que o observador está localizado a uma distância que tende ao infinito, o que, por sua vez, tem como consequência o fato das retas projetantes serem paralelas entre si. A posição do OR em relação aos planos de projeção é a seguinte: pelo menos uma das faces do OR tem que estar paralela ao plano de projeção.

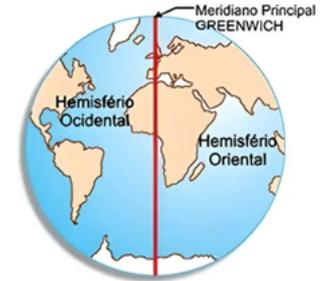
O método desenvolvido por Monge consiste, primeiramente, na divisão do espaço por meio de dois planos de projeção, um vertical e outro horizontal. Fazendo uma analogia às linhas imaginárias do Planeta Terra, é como se o plano horizontal passasse exatamente na Linha do Equador dividindo o espaço em dois semiespaços, um meridional ou sul e outro setentrional ou norte, como aparece na figura 4.2. E da mesma maneira, o plano vertical passasse no meridiano de Greenwich. A figura 4.3 mostra este plano dividindo o espaço em dois semiespaços, um oriental ou leste e outro ocidental ou oeste.

Figura 4.2 - Hemisférios Norte e Sul do Globo Terrestre



Fonte: Albuquerque- SoCientífica, 2022<sup>2</sup>.

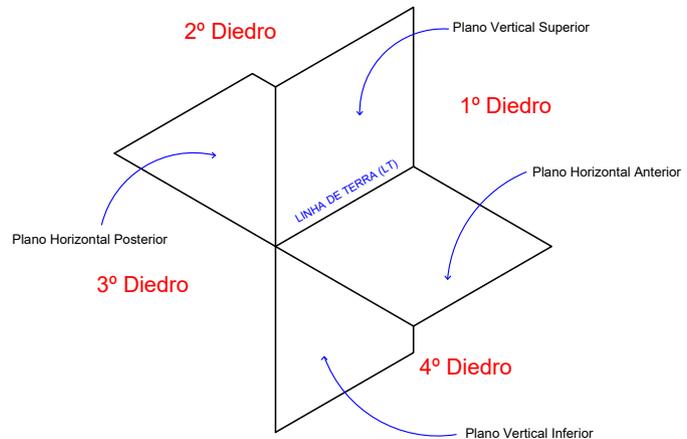
Figura 4.3 - Hemisférios Ocidental e Oriental do Globo Terrestre



Fonte: Albuquerque- SoCientífica, 2022<sup>3</sup>.

Os dois planos juntos dividem o espaço em quatro semiespaços, chamados de diedros (“di” de dois e “edros” de planos) os quais são numerados e organizados como mostra a figura 4.4. Cada diedro consiste no espaço existente entre dois semiplanos, cuja nomenclatura também está na figura 4.4. A linha de encontro ou interseção do Plano Horizontal com o Plano Vertical chama-se Linha de Terra ou, simplesmente, LT.

Figura 4.4 - Os quatro Diedros



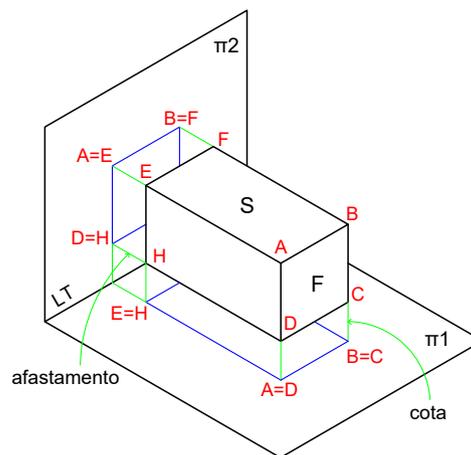
Fonte: Autoras.

sumário

- 2 Disponível em: <https://socientifica.com.br/os-4-hemisferios-do-mundo/>. Acesso em: 02 agosto 2022.
- 3 Disponível em: <https://socientifica.com.br/os-4-hemisferios-do-mundo/>. Acesso em: 02 agosto 2022.

Em seguida, Monge posicionou o objeto a ser representado num dos diedros – geralmente sem tocar em nenhum dos planos de projeção – e, assim, realizou a projeção ortogonal de todos os pontos desse objeto nos planos de Projeção Vertical e Horizontal (ver figura 4.5).

Figura 4.5 - Dupla projeção ortogonal de um objeto



Fonte: Autoras.

A figura 4.5 traz uma nova nomenclatura para os planos de projeção e para as distâncias entre o objeto e os planos de projeção, as quais também serão adotadas ao longo desse livro: (1) o plano de projeção horizontal será chamado de plano  $\pi_1$  e (2) o plano de projeção vertical será chamado de plano  $\pi_2$ . Já a distância entre qualquer ponto do objeto e o plano  $\pi_1$ , é chamada de cota, e a distância entre o objeto e o plano  $\pi_2$ , é chamada de afastamento. A figura também mostra que a cota fica registrada no plano de projeção vertical e que o afastamento fica registrado no plano de projeção horizontal.

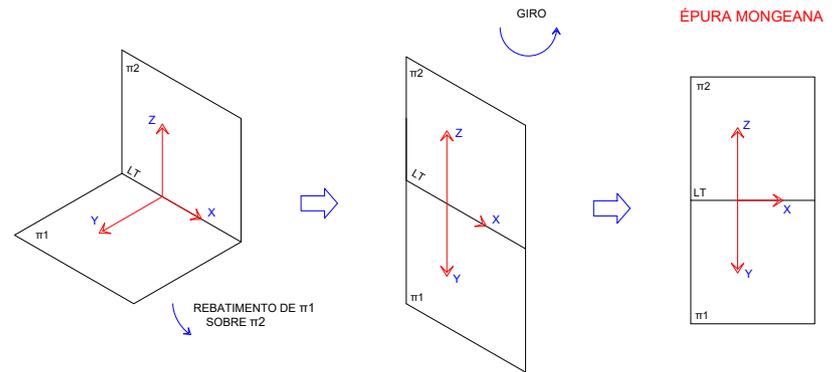
Tomando como exemplo o objeto da figura 4.5, sua face frontal está perpendicular ao plano de projeção horizontal, assim é possível perceber: (1) que as arestas AB e DC têm projeções em forma de segmento de reta no plano  $\pi_1$ ; (2) que as arestas AD e BC foram reduzidas a pontos também no plano  $\pi_1$ ; (3) todos os pontos contidos na face ABCD foram projetados no plano  $\pi_1$  sobre o mesmo segmento de reta, ou seja, o plano ABCD está em Vista Básica (VB) com relação a  $\pi_1$ . Vale salientar que a condição para que um plano fique em VB com relação a outro plano é que ele contenha uma reta que seja perpendicular ao plano onde ele será projetado. Segundo J. B. Millar, em sua obra *Elements of Descriptive Geometry* de 1887, o teorema IV da Geometria Descritiva, afirma que “todo plano que contém a normal de outro plano é perpendicular a este plano” (MILLAR, 1887, p.5).

Analisando a mesma face (Frontal), agora em relação ao plano  $\pi_2$ , é possível afirmar: (1) que ela é paralela a tal plano de projeção; (2) que todas as arestas foram projetadas de forma que foram mantidas suas medidas lineares; (3) que os ângulos entre as arestas, ao serem projetados, também mantiveram suas grandezas e que, portanto, tal face foi projetada em Verdadeira Grandeza (VG).

Ao observar as projeções do objeto em  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , percebe-se que o objeto está representado em sua totalidade tanto em  $\pi_1$  como em  $\pi_2$ , ou seja, todos os vértices, arestas e faces da peça estão projetadas nos dois planos. No entanto, não é possível ter uma ideia da tridimensionalidade do objeto, observando-se apenas uma das suas projeções. Para isso, é necessária a leitura de ambas as vistas uma vez que essas projeções estão relacionadas.

Dando continuidade ao raciocínio gráfico de Monge – cujo objetivo era obter a representação do objeto, que é tridimensional, em duas dimensões – foi necessário fazer o plano horizontal girar de modo que ele coincidissem com o plano vertical. Com essa operação, Monge criou o que ele chamou de Épura, definindo-a como sendo a representação de um objeto por suas projeções. Na épura é possível visualizar as três dimensões do objeto, utilizando-se apenas duas dimensões de uma superfície qualquer, como o papel, conforme mostra a figura 4.6.

Figura 4.6 - A Épura



Fonte: Autoras.

É importante salientar que o sistema idealizado por Monge presumia dois planos e, conseqüentemente, realizava uma dupla projeção. Sendo assim, após realizada a projeção, um plano era rebatido sobre o outro e assim as duas projeções poderiam ser representadas em uma superfície bidimensional, como a folha do papel formando então uma Épura.

Com o passar do tempo o método evoluiu e foram inseridos novos planos de projeção, conseqüentemente, novos diedros foram gerados. Dessa maneira, passou-se a projetar o objeto também nos planos laterais, inferior e posterior, que somados aos planos iniciais (frontal e superior) passaram a compor seis vistas ortográficas, o chamado Sistema de Vistas, sendo assim, é possível representar um objeto em todas as suas possíveis vistas, bem como realizar operações gráficas.

O método é conhecido por diversos nomes entre eles: Sistema Ortogonal, Sistema Ortográfico, Vistas Ortogonais, Vistas Ortográficas, Vistas Mongeanas, Sistema Alemão, Sistema Universal, Sistema Europeu, Desenho Técnico, porém a nomenclatura "Sistema de Vistas" é a mais comumente referenciada.

### 4.3. OBSERVADOR, OBJETO E PLANOS DE PROJEÇÃO

Como já foi dito, no Sistema de Vistas um objeto terá projeções horizontais e verticais, independente do diedro no qual está localizado. No primeiro capítulo deste livro, foram estudados os elementos que compõem um sistema de projeção. Abaixo estão relacionados os principais elementos e características do Sistema de Vistas:

1. **Observador:** como se trata de um sistema cilíndrico o observador está no infinito;
2. **Projetantes:** partem dos olhos do observador e encontram o Plano de Projeção Ortogonalmente;
3. **Objeto e Ortoedro de Referência:** o OR, que envolve o objeto, tem as faces paralelas aos planos de projeção, ou seja, a face frontal do OR está paralela ao plano de projeção vertical e a face superior do OR está paralela ao plano de projeção horizontal;
4. **Planos de projeção:** os principais planos de projeção são o Horizontal ( $\pi_1$ ) e o Vertical ( $\pi_2$ ), no entanto, é possível utilizar outros planos para obter mais vistas do objeto. Nesses casos, cada face do OR permanece com a mesma característica das outras faces, ou seja, paralelas aos planos de projeção correspondentes;
5. **Imagem:** produto final da projeção, representação do objeto, que é o que se busca.

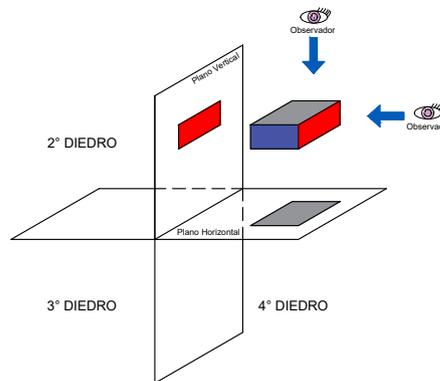
Tais elementos adquirem diferentes posições um em relação ao outro, considerando cada diedro, como será ilustrado nos itens seguintes. Na condição do primeiro diedro – que é a mais utilizada – um princípio básico respeitado é de que o objeto sempre deve estar entre o observador e o plano de projeção.

### 4.3.1 Primeiro e terceiro diedros

No primeiro diedro, a face frontal do objeto projeta-se no plano vertical superior e a face superior projeta-se no plano horizontal anterior, como mostra a figura 4.7. Dessa maneira, a ordem dos elementos da projeção é a seguinte: **Observador - Objeto - Plano de Projeção**.

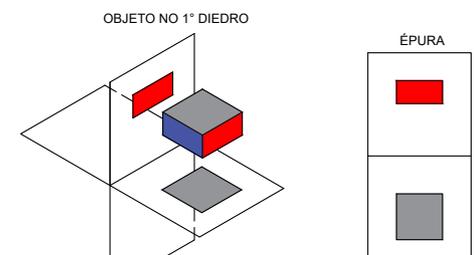
Outra consequência do posicionamento do objeto no primeiro diedro é que cotas e afastamentos são positivos. É por essa razão que a maioria das representações se faz localizando-se o objeto no primeiro diedro. Em épura, tem-se a face frontal representada acima da linha de terra e a face superior representada abaixo da mesma linha, resultando no que mostra a figura 4.8.

Figura 4.7 - Objeto no primeiro diedro



Fonte: Autoras.

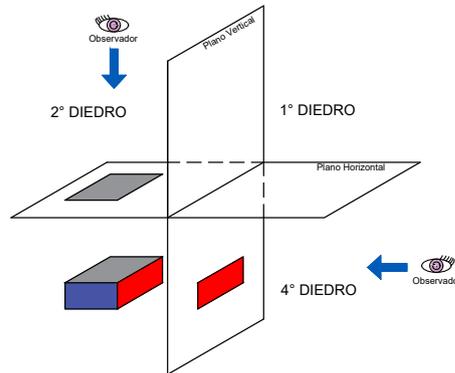
Figura 4.8 - Objeto no primeiro diedro em épura



Fonte: Autoras.

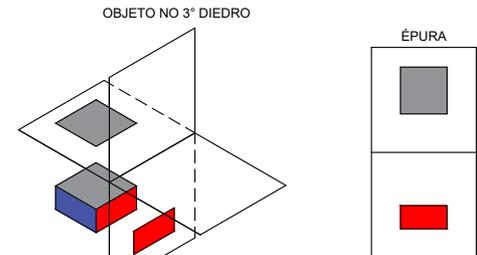
Quando o objeto é localizado no terceiro diedro, como mostrado pela figura 4.9, ele passa a não mais estar entre o observador e o plano de projeção. A ordem dos elementos da projeção passa a ser a seguinte: **Observador - Plano de Projeção - Objeto**.

Figura 4.9 - Objeto no terceiro diedro



Fonte: Autoras.

Figura 4.10 - Objeto no terceiro diedro em écura



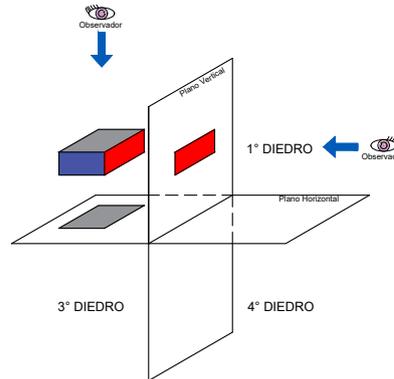
Fonte: Autoras.

Essa mudança faz com que a face frontal do objeto seja projetada no plano vertical inferior e a face superior é projetada no plano horizontal posterior. Quando se faz o rebatimento do plano horizontal sobre o vertical para obter a écura temos – tem-se, diferente do que ocorre no primeiro diedro – a face frontal abaixo e a face superior acima da LT.

### 4.3.2 Segundo e quarto diedros

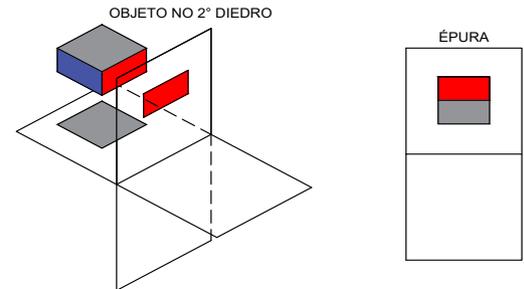
Na representação gráfica técnica, o segundo e o quarto diedros não são utilizados para posicionar objetos, porque quando ocorre a rotação do plano horizontal sobre o plano vertical para obter a écura, as projeções ficam sobrepostas, o que dificulta o entendimento da representação do objeto. Observe as figuras abaixo.

**Figura 4.11 - Objeto no segundo diedro**



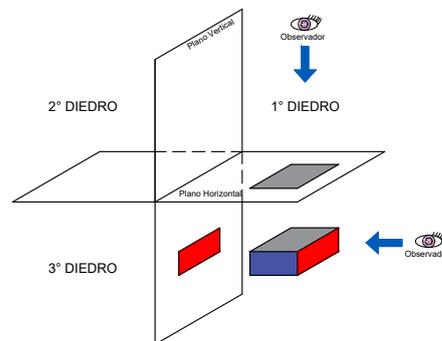
Fonte: Autoras.

**Figura 4.12 - Objeto no segundo diedro em épora**



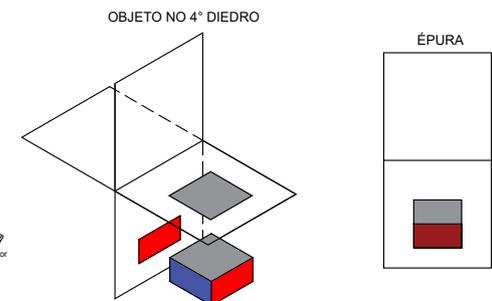
Fonte: Autoras.

**Figura 4.13 - Objeto no quarto diedro**



Fonte: Autoras.

**Figura 4.14 - Objeto no quarto diedro em épora**



Fonte: Autoras.

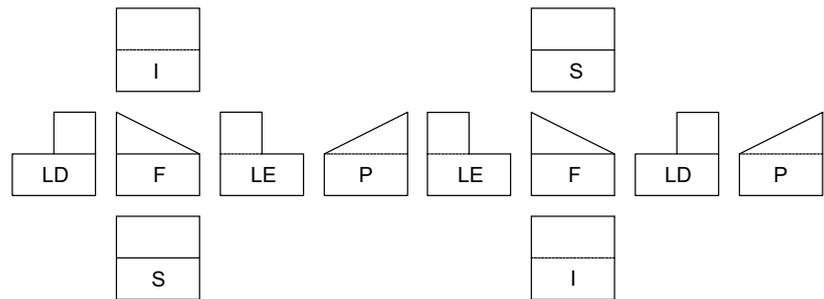
### 4.3.3 Sistemas alemão e americano

A organização da apresentação das vistas demonstrada no item anterior é resultado do diedro escolhido para posicionar o objeto. No caso da organização trazida na figura 4.15, o objeto está posicionado no primeiro diedro, ou seja, a ordem dos elementos da projeção é a seguinte: **Observador – Objeto - Plano de Projeção** (ver itens 4.3.1 e 4.3.2). Quando isso acontece diz-se que o sistema de apresentação das vistas adotado foi o Sistema Alemão ou Europeu (**adotado nesse livro**). É possível perceber que a vista lateral direita (LD) está à esquerda da vista frontal (F), a vista lateral esquerda (LE) está à direita da vista F, a vista superior (S) está abaixo da vista F e a vista inferior (I) está acima da vista F.

O Sistema Americano difere do Sistema Alemão exatamente no que diz respeito ao diedro escolhido para posicionar o objeto. No Sistema Americano o objeto fica no terceiro diedro. Dessa forma, a ordem dos elementos da projeção é: **Observador - Plano de Projeção - Objeto**. Tal fato resulta numa apresentação diferente para as vistas, a qual está ilustrada na figura 4.16. É possível perceber que a vista LD está à direita da vista F, a LE está à esquerda, a vista S está acima da F e a vista I está abaixo da vista F.

Figura 4.15 - Vistas no Sistema Alemão

Figura 4.16 - Vistas no Sistema Americano



Fonte: Autoras.

Fonte: Autoras.

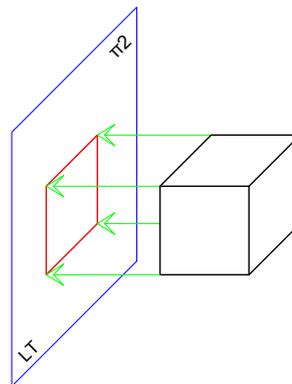
No Brasil, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), que regula todo tipo de padronização, não só para a área da Geometria Gráfica e do Desenho Técnico, como também para outras áreas do conhecimento, adota o Sistema Alemão, também chamado de Sistema Europeu. No entanto, ela admite a utilização do Sistema Americano em determinadas áreas do conhecimento (NBR 10067) (ABNT, 1995).

#### 4.4 AS SEIS VISTAS

Uma única projeção ortogonal de um objeto não é suficiente para entendê-lo por completo. Comparando as figuras 4.17 e 4.18, se percebe que os objetos são diferentes, a primeira figura mostra um cubo, já a segunda um prisma. No entanto, as projeções das faces frontais das peças, ou seja, as projeções verticais são iguais.

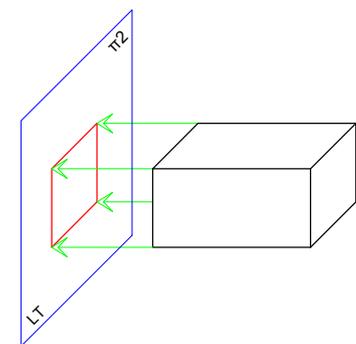
Caso somente a projeção vertical desses objetos estivesse disponível, se teria somente as dimensões de altura e largura. Dessa maneira, não seria possível identificar a dimensão da profundidade. Consequentemente, não se teria o entendimento correto dos objetos.

**Figura 4.17 - Projeção de um cubo em  $\pi_2$**



Fonte: Autoras.

**Figura 4.18 - Projeção de um ortoedro em  $\pi_2$**

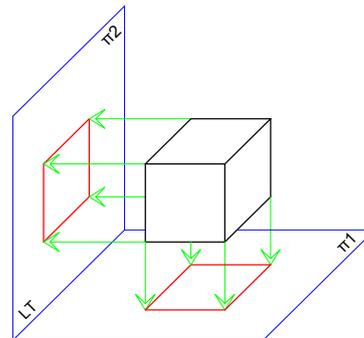


Fonte: Autoras.

Na medida em que outras faces da peça são projetadas é possível visualizar outras dimensões do objeto. As figuras 4.19 e 4.20 trazem a projeção da face superior das peças, o que por consequência faz as dimensões de largura e de profundidade serem mostradas.

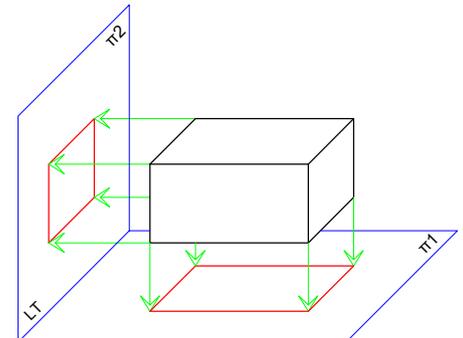
Com as projeções das faces frontal e superior dos objetos, as três dimensões da peça são visualizadas (frontal = largura x altura; superior = largura x profundidade). Dessa maneira, muitas peças já podem ser definidas, como é o caso das peças das figuras 4.17 e 4.18. Por essa razão essas duas projeções, a frontal e a superior, são chamadas de projeções básicas do Sistema de Vistas.

**Figura 4.19 - Dupla projeção ortogonal de um cubo**



Fonte: Autoras.

**Figura 4.20 - Dupla projeção ortogonal de um ortoedro**



Fonte: Autoras.

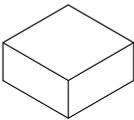
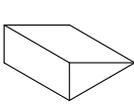
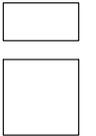
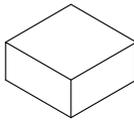
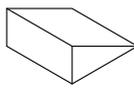
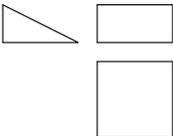
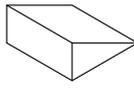
Entretanto, muitas vezes as duas projeções básicas não são suficientes para o entendimento de alguns objetos, sendo necessárias outras projeções. A figura 4.21 mostra, na sua primeira coluna, épuras de um mesmo objeto e nas demais colunas as isometrias simplificadas das possíveis interpretações dessas épuras.

Na primeira linha da figura 4.21 apenas uma das vistas é conhecida. Nesse caso, são possíveis pelo menos três interpretações do objeto, como mostram as figuras da linha 1, colunas A, B e C. Todas essas figuras podem ser representações da figura dada na épora 1.

Quando são fornecidas duas vistas, épora 2, ainda são possíveis duas interpretações do objeto, os objetos das colunas A e da coluna B. Note que a figura da coluna C é descartada, uma vez que a vista superior dada na épora não é compatível com a vista superior de um cilindro.

Para que se possa ter certeza de que objeto se trata, mais uma vista precisa ser dada. Tem-se, então, a épora 3, que traz as vistas F, S e LD. Com tais informações é possível afirmar que o objeto tratado é o que está representado na coluna B. Assim, percebe-se que ao fornecer três vistas define-se o objeto.

Figura 4.21 - Relação entre vistas e projeções

	ÉPURAS	A	B	C
1				
2				
3				

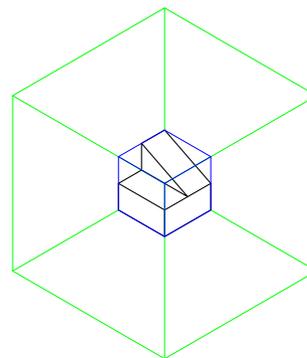
Fonte: Autoras.

Para realizar as seis projeções possíveis de um objeto é mais prático imaginar os seis planos de projeção se unindo para formar uma Caixa de Projeção imaginária. Dessa maneira, é mais fácil controlar a posição dos planos de projeção e garantir que estes estejam perpendiculares e/ou paralelos entre si. Sendo assim, os pares de planos (frontal x posterior, superior x inferior e lateral esquerdo x lateral direito) estão paralelos entre si; enquanto os planos laterais estão perpendiculares aos planos frontal, posterior, superior e inferior, como mostra a figura 4.22.

É importante não confundir a Caixa de Projeção (em verde) com o OR (em azul), conforme mostram as figuras 4.22 e 4.23. O OR também é uma caixa imaginária, mas esta envolve um objeto no espaço ficando totalmente ajustada ou “colada” ao objeto, de forma que seja o menor ortoedro que envolva todas as faces do objeto, tornando mais fácil a sua manipulação.

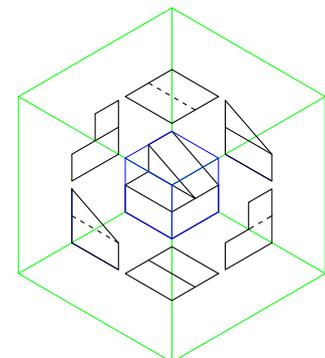
Após o posicionamento do objeto dentro do OR e este dentro da Caixa de Projeção é feita a projeção do objeto em todas as faces da caixa de projeção. Tais faces funcionam como planos de projeção e, duas a duas, funcionam como diedros. Dessa maneira, o objeto tem sua representação em cada um dos seis planos de projeção (faces da caixa), observar a figura 4.23.

**Figura 4.22 - Objeto com OR e caixa de projeção**



Fonte: Autoras.

**Figura 4.23 - Vistas na caixa de projeção**

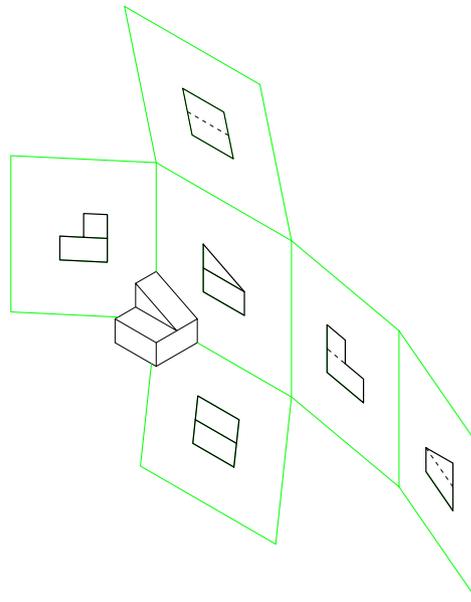


Fonte: Autoras.

Após as projeções, a Caixa de Projeção é aberta, como mostra a figura 4.24. Esse movimento é o mesmo feito por Gaspard Monge ao fazer o plano horizontal coincidir com o plano vertical, para assim criar a épura mongeana. De forma análoga, quando a caixa é aberta, é possível ver todas as representações do objeto em uma superfície bidimensional. No caso da figura analisada, após a abertura da caixa, todos os planos envolvidos coincidiram com o plano vertical e, assim, tem-se as vistas de todas as faces do objeto.

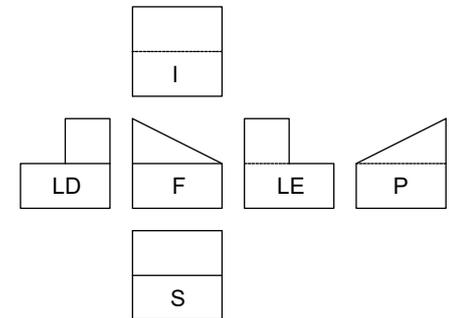
É possível perceber que as vistas ficam organizadas segundo certa ordem, como mostra a figura 4.15. Esta ordem não é aleatória, ela é o resultado da relação entre os diedros e possibilita o processo de projeção e obtenção das vistas como foi visto nas figuras 4.23 e 4.24.

**Figura 4.24 - Abertura da caixa de projeção**



Fonte: Autoras.

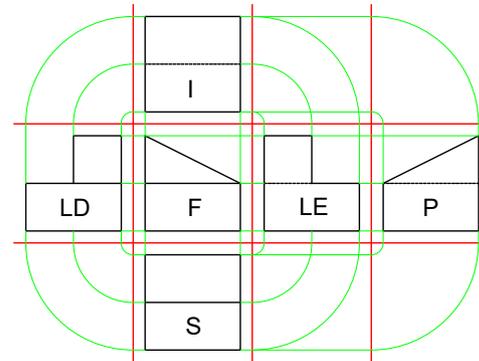
**Figura 4.15 - As seis vistas e um objeto**



Fonte: Autoras.

Essa organização também deixa clara uma característica das vistas, a relação projetiva existente entre elas, a qual se dá por meio das **linhas de chamada**, que aparecem em verde na figura 4.25. Tal relação possibilita que informações dimensionais (x, y e z) de uma vista, auxiliem a construção das outras vistas. Além disso, é exatamente essa relação que possibilita que operações gráficas sejam realizadas na época, isso porque elas registram as medidas lineares e angulares do objeto, bem como as distâncias entre as arestas e os planos de projeção.

Figura 4.25 - Vistas com linhas de chamada



Fonte: Autoras.

A vista F é considerada a principal vista da peça por conter as informações mais importantes. Tal fato, juntamente com a relação projetiva existente entre as vistas, faz com que ela seja referência para a construção ou localização das outras. Tal vista representa a projeção obtida no plano vertical de projeção ( $\pi_2$ ). A figura 4.15 mostra que esta vista fica localizada no centro da época, desconsiderando a vista P.

A vista S se localiza abaixo da vista F e a vista I, se localiza acima. Seguindo o mesmo raciocínio a vista LD fica à esquerda da vista F e a vista LE fica à direita da vista F. Já a vista P pode ficar ao lado das vistas LD e LD ou acima da vista I ou, ainda, abaixo da vista S. No exemplo dado na figura 4.15 a vista P está localizada ao lado da vista LE.

## 4.5 OS EIXOS COORDENADOS

É interessante perceber que a interpretação ou leitura das informações trazidas pelo Sistema de Vistas exige um pouco mais de abstração e de conhecimento geométrico gráfico, uma vez que diferentemente da Isometria Simplificada ou da Cavaleira, as informações sobre as dimensões do objeto vêm “separadas”. Cada vista traz duas dimensões do objeto, enquanto a terceira dimensão aparece sempre em VB (perpendicular ao plano de projeção). A vista F, por exemplo, traz as medidas de largura (x) e de altura (z), as medidas de profundidade (y) ficam em VB.

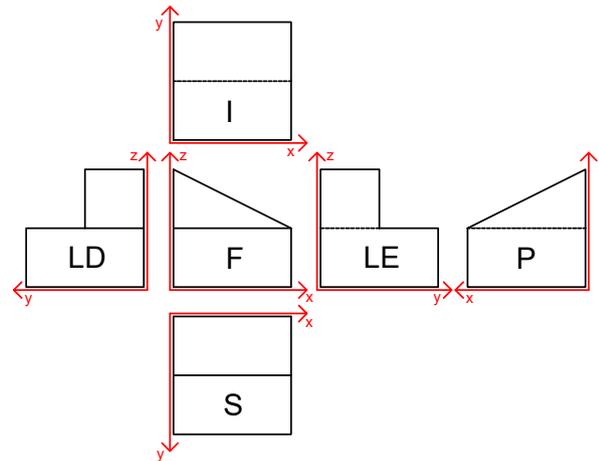
Já a vista S traz as medidas de largura (x), profundidade (y) e a medida de altura (z) em VB. Isso também acontece com as outras vistas, ou seja, cada uma delas mostra uma combinação de duas dimensões e a terceira dimensão em VB (perpendicular ao plano de projeção).

Assim, de acordo com as grandezas mostradas, podemos visualizar os planos de projeção em pares de vistas:

- F + P: que mostram medidas de largura (x) e altura (z), estando as medidas de profundidade (y) em VB;
- S + I: larguras (x) e profundidades (y), sendo que as medidas de altura (z) estão em VB;
- LD + LE: alturas (z) e profundidades (y), sendo que as medidas de largura (x) estão em VB.

A figura 4.26 traz os eixos coordenados ilustrados com todas as combinações de grandezas por vista. Para visualizar uma peça representada no Sistema de Vistas é preciso estabelecer um diálogo entre todas as vistas mostradas. Esse diálogo se dá por meio da relação projetiva existente entre as vistas do objeto. Somente assim, é possível ter uma ideia da totalidade da peça.

Figura 4.26 - Vistas com eixos coordenados



Fonte: Autoras.

## 4.6 VISUALIZAÇÕES DAS VISTAS E DA PEÇA

A figura 4.27 mostra a representação de um objeto, uma vista F, na qual se tem duas grandezas,  $x$  e  $z$  e a terceira grandeza é  $y$  que está em VB. Nesta vista percebe-se duas superfícies distintas (duas linhas poligonais fechadas), identificadas pelos números 1 e 2. Como se trata de uma vista F, as linhas poligonais 1 e 2 indicam superfícies com profundidades ( $y$ ) diferentes.

Para saber se a peça traz uma interseção entre superfícies ou uma terceira superfície, é necessário que mais vistas sejam fornecidas, como foi discutido no item 4.4 deste livro. Dessa forma, é possível fazer uma associação entre as vistas, bem como utilizar a relação projetiva existente entre elas, para definir a volumetria da peça. Essas duas possibilidades geram uma série de possíveis interpretações para a peça, como mostra figura 4.28.

Figura 4.27 - Vista frontal de um objeto

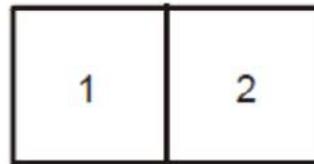
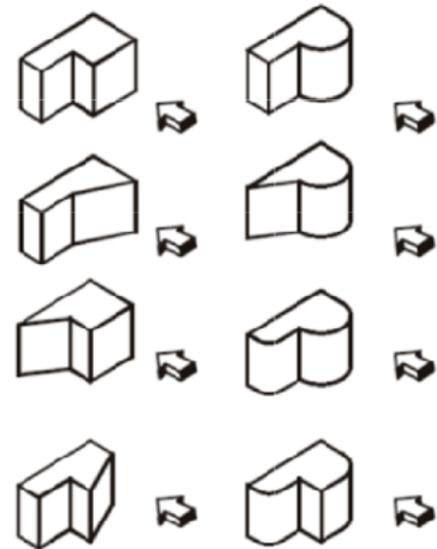


Figura 4.28 - Possíveis interpretações para o objeto com base na leitura da vista frontal (figura 4.27)



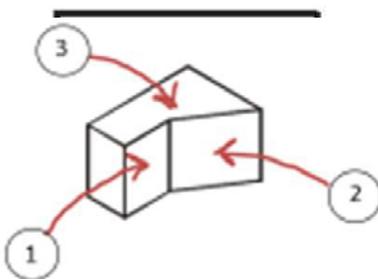
Fonte: Costa, 2008.

Fonte: Costa, 2008.

A figura 4.29 traz uma segunda vista da peça, nela estão indicadas por setas as superfícies 1 e 2, que estão reduzidas a uma reta. Sabe-se, por exemplo, que não há superfícies curvas, o que descartaria algumas das possíveis interpretações da peça presentes na figura 4.28.

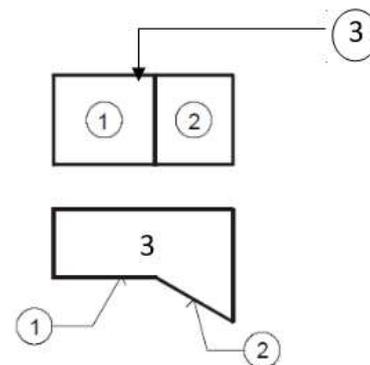
Já a figura 4.30 traz as duas vistas associadas, tal fato facilita a interpretação das informações, inclusive porque pelo próprio posicionamento das vistas já é possível afirmar que a vista da figura 4.27 é a vista F, enquanto que a vista da figura 4.29 é a vista S ou ainda que a primeira é a vista I e a segunda é a vista F. O mais comum é que sejam fornecidas as vistas F e S, visto que essas são as vistas que mostram as faces com mais detalhes da peça.

Figura 4.29 - Vista superior do objeto



Fonte: Costa, 2008.

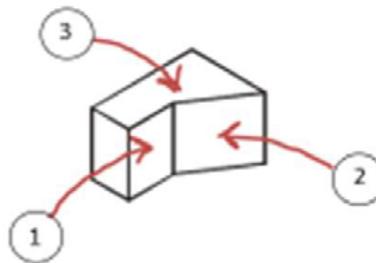
Figura 4.30 - Relação entre a vista frontal e a vista superior do objeto



Fonte: Costa, 2008.

A análise feita a seguir parte da interpretação de que a figura 4.30 traz as vistas F e S. Tal figura mostra a superfície número 1 em vista na vista F e em VB na vista S. Isso ocorre porque essa superfície está posicionada de modo paralelo ao plano vertical (plano da vista F) e de modo perpendicular ao plano horizontal (plano da vista S) (ver figura 4.31).

Figura 4.31 - Objeto em isometria simplificada



Fonte: Costa, 2008.

A superfície número 2 aparece do mesmo modo que a primeira superfície analisada, ou seja, em vista na vista F e como um segmento na vista S. No entanto, seu posicionamento em relação aos planos de projeção é diferente. Ela está perpendicular ao plano horizontal, mas é oblíqua ao plano vertical (ver figura 4.31).

No caso da superfície número 3 é possível afirmar que ela está paralela ao plano horizontal e perpendicular ao plano vertical (ver figura 4.31).

A interpretação das vistas ocorre dessa maneira, ou seja, por meio da análise das superfícies da peça em relação aos planos de projeção e da relação que elas estabelecem entre si. Parece mais complicado do que é na realidade. O treino da visualização das vistas ortográficas e da interpretação das peças ocorre através da resolução dos exercícios. Após a resolução de um bom número deles, a análise acima se torna automática.

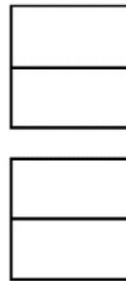
## 4.7 A ESCOLHA DAS VISTAS

Quando utilizamos o Sistema de Vistas para representar um objeto, muitas vezes não precisamos representar as seis vistas. A representação de três vistas, usualmente as vistas F, S e LD ou LE, é suficiente para o entendimento de um objeto. Isso porque nessas três vistas podemos ver a combinação dos três eixos coordenados, dois a dois. A escolha de que vistas serão representadas é muito importante, pois elas devem mostrar o máximo de detalhes existentes no objeto. Se a escolha das vistas a serem mostradas não for eficiente pode haver dúvida quanto à volumetria da peça o que pode acarretar uma interpretação incorreta da mesma.

No exemplo da figura 4.32, foram dadas apenas duas vistas de uma peça. Consequentemente há várias possibilidades de interpretação do objeto, como mostram as figuras 4.33 e 4.34. Se forem fornecidas somente tais vistas, não será possível definir com precisão qual a volumetria do objeto. Dessa maneira, deve-se sempre procurar representar

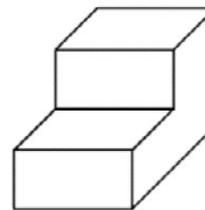
as vistas do objeto que mais claramente caracterizam-no. De forma que não deixe margens para dúvidas na interpretação.

**Figura 4.32 - Vistas frontal e superior de um objeto**



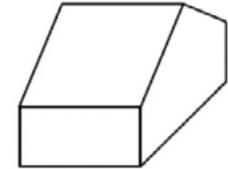
Fonte: Costa, 2008.

**Figura 4.33 - Interpretação 1 das vistas (figura 4.32)**



Fonte: Costa, 2008.

**Figura 4.34 - Interpretação 2 das vistas (figura 4.32)**



Fonte: Costa, 2008.

Como já foi mencionado, geralmente são representadas três vistas da peça, porém, há situações em que mesmo mostrando três vistas a interpretação continua indefinida, como mostram as figuras 4.35 e 4.36.

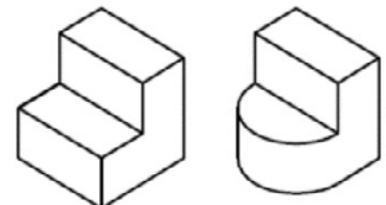
No caso das figuras mencionadas, ter representado as vistas LD e LE não ajudou a interpretação da volumetria da peça porque ambas são equivalentes, ou seja, não mostram nada diferente uma da outra. Para resolver tal situação seria necessário representar outro conjunto de vistas, como por exemplo, as vistas F, S e LD.

**Figura 4.35 - Vistas frontal e laterais de um objeto**



Fonte: Costa, 2008.

**Figura 4.36 - Duas possíveis interpretações para as vistas da figura 4.35**



Fonte: Costa, 2008.

## 4.8 REPRESENTAÇÕES DAS VISTAS DE OBJETOS

O primeiro passo para fazer uma representação é conhecer a convenção utilizada no Sistema de Vistas. O quadro 1.1, apresentado no capítulo 1, mostra as convenções a serem utilizadas deste livro.

**Quadro 1.1 - Tipo, denominação e aplicação de linhas**

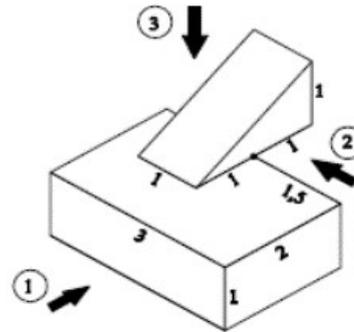
TIPO	DENOMINAÇÃO	APLICAÇÃO	
		CAVALEIRA E ISOMETRIA SIMPLIFICADA	SISTEMA DE VISTAS
	Contínua larga	Representar as arestas visíveis	Representar as arestas visíveis
	Contínua estreita	Representar o Ortoedro de Referência e as linhas auxiliares, construtivas gerais e arestas não visíveis	Representar as linhas de chamada (projeção das projetantes)
	Tracejada larga	-	Representar as arestas não visíveis
	Contínua mais larga*	-	Representar as linhas de terra (encontro dos planos de projeção)

(\*) Esse tipo de linha não é contemplado pela ABNT.

Fonte: Autoras, adaptado da NBR 6492 (ABNT, 2021).

Em seguida, é necessário identificar as medidas dos segmentos da peça nas direções das arestas do OR utilizando os conhecimentos já adquiridos sobre Cavaleira e Isometria Simplificada, como sugere a figura 4.37.

Figura 4.37 - Isometria simplificada de um objeto

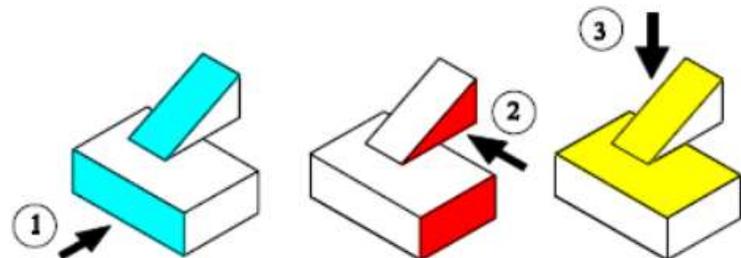


Fonte: Costa, 2008.

O próximo procedimento consiste na escolha das vistas que serão projetadas. Em geral, são representadas no Sistema de Vistas as mesmas vistas que aparecem na Cavaleira ou na Isometria Simplificada, uma vez que se tem informações sobre elas, ou seja, não é preciso presumir informações. No entanto, essa prática não é uma regra. É possível ter que projetar faces que não estão sendo vistas.

No exemplo mostrado na Isometria Simplificada da Figura 4.38 as vistas escolhidas foram: F, número 1, faces em azul; LD, número 2, faces em vermelho; e S, número 3, faces em amarelo.

Figura 4.38 - Objeto com faces em destaque



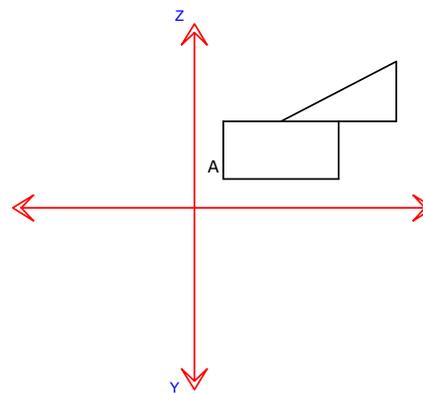
Fonte: Costa, 2008.

Na sequência, as vistas são organizadas nos quadrantes formados pelas LTs, de acordo com a ordem mostrada na figura 4.25, já que nesse livro o Sistema Europeu ou Alemão foi o padrão adotado para representar os objetos. O resultado dessa organização das vistas está na figura 4.41.

Procede-se então para a representação das vistas da peça, deixando um espaço entre as vistas e as LTs. Esse espaço deve ter, de preferência, entre 0,5 e 1 cm. Uma vez escolhida, essa distância terá que ser respeitada na representação das outras vistas, tal fato mantém entre elas a relação projetiva.

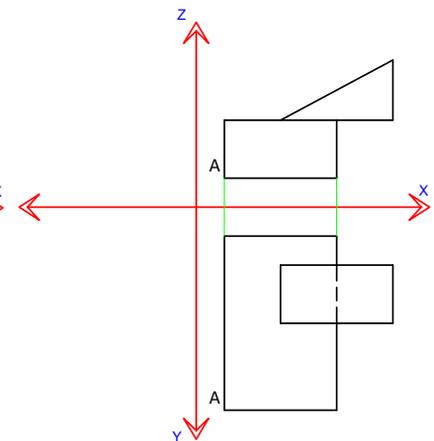
É possível começar a representação por qualquer uma das vistas. No exemplo da figura 4.39, a representação começa pela vista F e a distância escolhida entre as vistas e as LTs é de 1 cm. De acordo com que já foi estudado, a vista F mostra a coordenada x (largura) e a coordenada z (altura). A coordenada y (profundidade) está em VB. O ponto A da figura possui, então, as seguintes coordenadas  $[x; z] = [1; 1]$ . Em todas as outras vistas o ponto A deve aparecer com as mesmas coordenadas.

Figura 4.39 - Representação da vista frontal



Fonte: Autoras.

Figura 4.40 - Representação das vistas frontal e superior

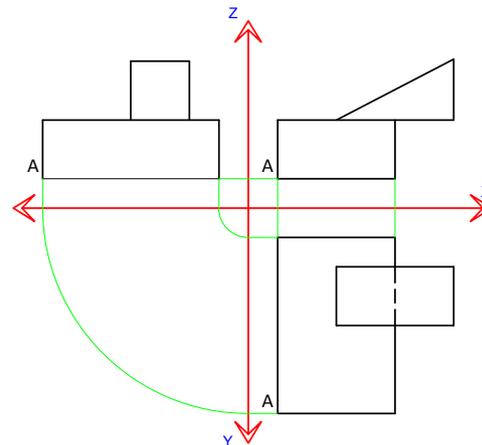


Fonte: Autoras.

Na figura 4.40, que traz também a vista S, é possível observar a coordenada y do ponto A, que é [5]. Dessa forma, tem-se as três coordenadas, sendo elas  $[x; y; z] = [1; 5; 1]$ . Com essa informação e a relação projetiva entre as faces, dada pelas linhas de chamada, é possível encontrar o ponto A em qualquer uma das outras vistas.

A figura 4.41 mostra o ponto A sendo “transportado” pelas linhas de chamada para o quadrante onde será construída a vista LD. Esse procedimento pode ser feito para qualquer ponto do objeto representado.

**Figura 4.41 - Representação das vistas frontal, superior e lateral direita**



Fonte: Autoras.

É importante observar que:

- As medidas de profundidade (y) são transportadas primeiro até o eixo y e só então são levadas com o compasso ou com o esquadro de 45° para o eixo x (que representa o rebatimento do eixo y na épura). Se as medidas de profundidade forem transportadas com o compasso, a ponta seca deve ser centrada na origem dos eixos coordenados;

- As linhas tracejadas (grossas) são utilizadas para representar as arestas existentes, porém não visíveis;
- As linhas de chamada são traços contínuos finos;
- As LTs e as arestas visíveis da peça devem ser traços contínuos grossos.

#### 4.8.1 Passando das vistas para a Cavaleira e Isometria Simplificada

Realizar a leitura de uma peça dada no Sistema de Vistas e representá-la em Cavaleira ou Isometria Simplificada é uma tarefa difícil. Isso porque realizar a síntese gráfica a partir de três ou mais projeções é algo, cognitivamente muito elaborado e requer treino para ser realizado com sucesso.

Uma forma de treinar a visualização espacial, mais especificamente a síntese gráfica, é se familiarizar com as representações dos sólidos básicos: prisma, pirâmide, cone, cilindro e esfera. Além das representações dos sólidos por completo, também é importante atentar para as representações de partes destes sólidos, como por exemplo,  $\frac{1}{2}$  esfera,  $\frac{1}{2}$  cone,  $\frac{1}{4}$  de cilindro, etc.

Alguns procedimentos podem ajudar no processo de síntese gráfica. Aqui descrevemos algumas ações que podem contribuir para uma boa leitura de uma peça:

1. Realizar o procedimento de representação no Sistema de Vistas de todos sólidos básicos: prisma, pirâmide, cone, cilindro e esfera;
2. No Sistema de Vistas, traçar todas as **linhas de chamada** conectando as vistas dadas. Ao conectar as vistas, conseqüentemente conectam-se os volumes que formam a peça. Dessa maneira fica mais fácil identificar os diferentes volumes que formam a peça (para realizar esse procedimento com eficácia é importante ter familiaridade com as representações dos sólidos básicos e de suas partes);

3. Iniciar a representação da peça traçando o OR ainda nas vistas ortográficas. Assim se terá total controle sobre as medidas totais da peça, larguras, alturas e profundidades. Em seguida, representar a peça, com auxílio do esboço, dentro do OR;
4. Identificar os **diferentes volumes** que compõem a peça, procurar compreender cada um deles em separado, se for preciso pode ser feito um esboço em separado de cada volume. Esse pensamento é muito semelhante ao procedimento de decomposição na matemática. Por exemplo, quando somamos  $130 + 120 =$  intuitivamente somamos  $100 + 100 = 200$  e  $30 + 20 = 50$ , totalizando 250;
5. **Nomear pontos nos vértices.** Esse processo é importante para identificar no sólido partes mais complexas, ou aquelas que temos dúvidas. Localizar vértices importantes em todas as vistas vai ajudar no processo de entendimento mais detalhado da peça;
6. Antes de começar sua a representação com instrumentos é fundamental fazer um **esboço da peça**. Nessa etapa, também está presente um importante tipo de raciocínio típico da matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. Funciona assim, quando se observa as vistas, e se realiza os dois primeiros procedimentos o estudante gera uma hipótese do que se imagina ser a peça dada. Porém, apenas quando se representa a peça por completo é que se poderá comprovar ou não a hipótese. Dessa maneira, é fundamental que se trace um **esboço** do que se imagina ser a peça, assim poderá ir confrontando, a todo o momento, aquilo que se está imaginando com as vistas da peça. O esboço é importante porque é algo que se pode traçar rapidamente, sem muito compromisso com medidas, conferindo agilidade ao raciocínio. Após essa etapa não haverá mais dúvidas de como é a peça e assim poderá começar a fazer a representação com auxílio de instrumentos.

## 4.9 SÓLIDOS BÁSICOS: PRISMAS, PIRÂMIDES, CILINDROS, CONES E ESFERAS

Nesse livro, as peças serão dadas em Cavaleira ou em Isometria Simplificada e o estudante terá que representá-las no Sistema de Vistas; ou, ainda, realizar o caminho inverso, ou seja, representar figuras que são dadas no Sistema de Vistas, em Cavaleira ou em Isometria Simplificada.

Para iniciar a representação de um sólido, seja qual for o sistema escolhido, é preciso reconhecer suas propriedades geométricas. Além disso, é necessário que a figura dada seja compreendida para só então representá-la em uma projeção diferente da dada. Para isso é crucial reconhecer o tipo de representação em que a figura foi elaborada, ou seja, se a peça dada está representada em Cavaleira, Isometria Simplificada ou no Sistema de Vistas. Como cada uma dessas projeções possui regras próprias de representação (já estudadas nos capítulos anteriores) é possível identificar o tipo de projeção utilizado para representá-la e, assim, extrair, com precisão, as grandezas lineares e angulares necessárias para a (re) construção da peça em outro sistema de representação.

### 4.9.1 Prisma

Para representar prismas é preciso ter em mente suas características básicas, ou seja, saber que eles são sólidos geométricos delimitados por faces planas, que suas bases pertencem a planos paralelos entre si e que suas faces laterais serão quadriláteros.

Dessa forma, dado o objeto da figura 4.42, o primeiro procedimento é reconhecer qual sistema de representação foi utilizado. Dessa forma é possível extrair informações, especialmente com relação às medidas de largura, profundidade e altura.

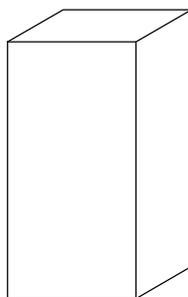
No caso dessa figura, o objeto está desenhado em Cavaleira e possui  $K = 0,5$ , isso significa que quando a peça for representada em Isometria Simplificada ou no Sistema de Vistas, as medidas relativas ao eixo  $y$  serão aumentadas (segundo o fator  $K$  dado que é de  $0,5$ ), uma vez que nesses sistemas de representação o  $K$  sempre é igual a 1.

Feito isso é necessário identificar as faces que estão sendo mostradas, no caso do exemplo são  $F$ ,  $S$  e  $LD$ , como mostra a figura 4.43.

Em seguida, as vistas são organizadas nos quadrantes resultantes do encontro das LTs segundo a lógica, já estudada, apresentada na figura 4.44. É importante lembrar que é preciso definir uma distância entre as vistas e as LTs (ou seja, entre o objeto e os planos de projeção), sendo ideal que seja a mesma em todos os quadrantes.

Figura 4.42 - Prisma representado em Cavaleira

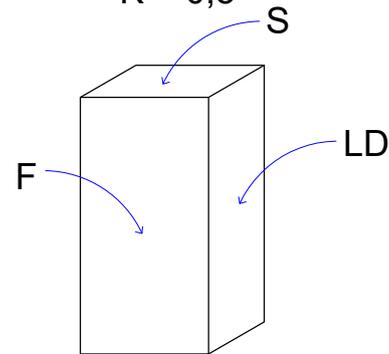
$K = 0,5$



Fonte: Autoras.

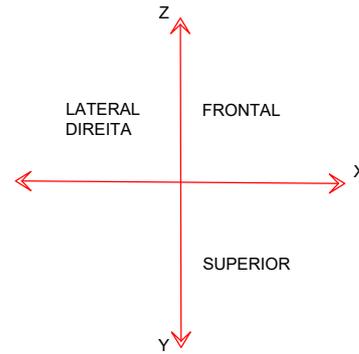
Figura 4.43 - Identificação das faces do prisma

$K = 0,5$



Fonte: Autoras.

Figura 4.44 - Organização das vistas em épura

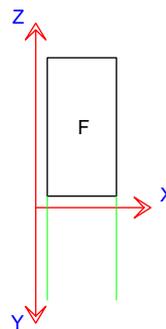


Fonte: Autoras.

A representação das vistas do objeto é iniciada com a representação da vista F, a qual guarda as medidas de largura e altura, extraídas da figura dada em Cavaleira, já que nela a vista F está em VG (ver figura 4.45).

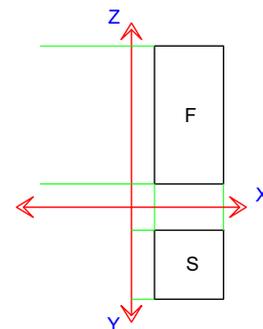
O próximo procedimento consiste na representação da vista S através do traçado das linhas de chamada (no sentido vertical), o que mais parece o prolongamento das arestas que representam as alturas, como pode ser visto na figura 4.46.

Figura 4.45 - Vista frontal do prisma



Fonte: Autoras.

Figura 4.46 - Vistas frontal e superior do prisma



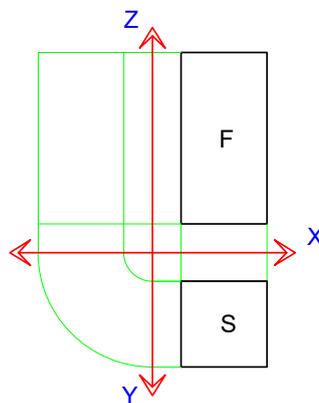
Fonte: Autoras.

Em seguida, as medidas de profundidade, extraídas da Cavaleira são introduzidas na representação no quadrante da vista S, como também aparece na figura 4.46.

Após a representação dessa vista, procede-se com o traçado das linhas de chamada horizontais. Estas vão partir da vista F levando as medidas de altura para a construção da vista LD, bem como vão partir da vista S levando as medidas de profundidade para a construção da mesma vista. No caso da vista S, as linhas de chamada vão até o eixo y. Depois, com o compasso, ou com o esquadro de 45°, transportam-se as medidas de profundidade da vista S até o quadrante da vista LD. O compasso deve ser centrado na origem dos eixos coordenados e as linhas de chamada devem partir de um eixo e chegar até o outro eixo, como mostra a figura 4.47.

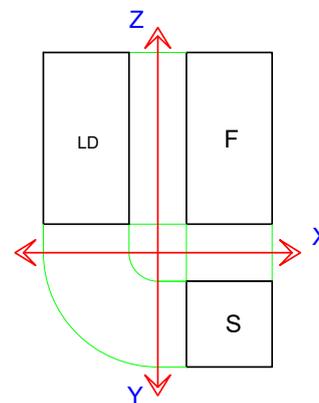
Em seguida, as linhas de chamada são levantadas a partir do eixo para cruzarem-se com as linhas que partiram da vista F. Dessa forma, a vista LD é definida, conforme resultado final da épura na figura 4.48.

Figura 4.47 - Construção da vista lateral direita



Fonte: Autoras.

Figura 4.48 - Representação de três vistas do prisma



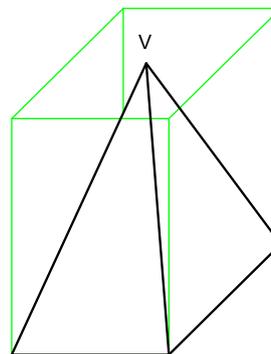
Fonte: Autoras.

### 4.9.2 Pirâmides

Pirâmide é um sólido geométrico delimitado por faces planas, sendo sua base um polígono qualquer e suas faces laterais triângulos que possuem um ponto em comum chamado de vértice. Dada a pirâmide da figura 4.49, o primeiro procedimento para sua representação no Sistema de Vistas é, como foi dito para Prismas, a identificação do sistema em que a figura foi dada. No caso da figura 4.49 depois de uma análise dos ângulos representados é possível afirmar que ela está em Cavaleira.

Em seguida, se faz uma análise mais profunda da representação para que a peça seja entendida por completo. Um recurso que auxilia o entendimento de uma peça é, como foi discutido no primeiro capítulo, o uso da técnica do Ortoedro de Referência, que aparece em verde na figura 4.49. Em razão da representação do OR é possível afirmar que a figura 4.49 representa uma pirâmide reta de base quadrangular, ou seja, todas as faces triangulares são iguais e o vértice se projeta no centro da base.

Figura 4.49 - Pirâmide representada em Cavaleira



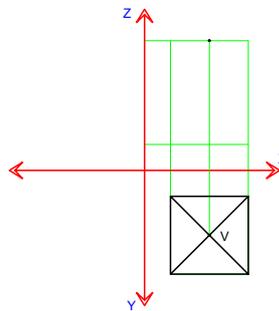
Fonte: Autoras.

A representação da pirâmide em estudo teve início com vista S, ver figura 4.50, que guarda as mesmas medidas de largura e de profundidade

dadas na projeção. O próximo procedimento é a representação da vista F. Para isso estendemos as linhas de chamada no sentido vertical, incluindo a linha de chamada que contém as informações sobre o vértice.

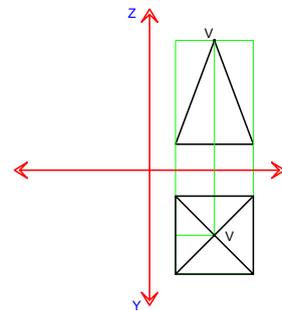
Em seguida, são traçadas linhas de construção, com as medidas de altura, trazidas da Cavaleira (ver figura 4.50). Na figura 4.51 é possível verificar que conhecendo a localização do vértice, facilmente são traçadas as duas arestas que representam as duas faces laterais da pirâmide, e por consequência, a face frontal é definida. As linhas de construção e de chamada podem ser deixadas na representação, porém devem ser linhas contínuas finas para que se diferenciem das arestas definitivas que são linhas contínuas grossas.

**Figura 4.50 - Vista superior da pirâmide**



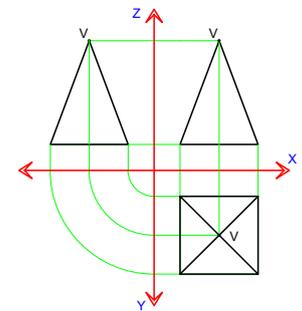
Fonte: Autoras.

**Figura 4.51 - Vistas superior e frontal da pirâmide**



Fonte: Autoras.

**Figura 4.52 - Vistas superior, frontal e lateral direita da pirâmide**



Fonte: Autoras.

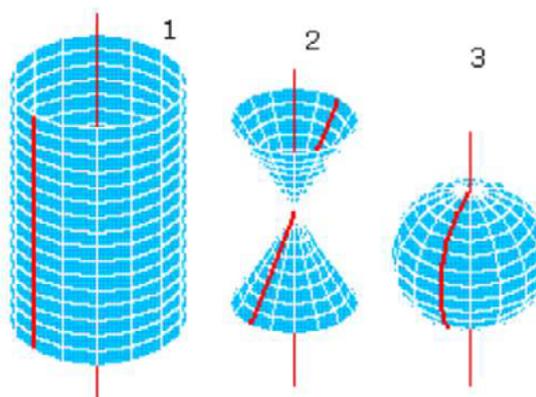
Para representar a vista LD, procede-se como foi explicado para os prismas, ou seja, as medidas de altura e de profundidade são transportadas para o quadrante em que a vista LD será representada por meio das linhas de chamada. Ao se cruzarem, elas criam uma malha com linhas e pontos, que auxiliam a representação tanto das arestas definitivas quanto das não visíveis da peça, quando for o caso. É importante perceber que um ponto sempre estará sobre a mesma linha de chamada. Isso ocorre devido à existência da relação projetiva entre as faces, estabelecida pelas linhas de

chamada. Um ótimo exemplo para ilustrar essa situação é o ponto V que representa o vértice da pirâmide. Ele está sempre na mesma linha de chamada, não importa a vista em questão. Em outras palavras, ele “percorre” todos os quadrantes (ver figura 4.52).

### 4.9.3 Geratrizes de limites de visibilidade nos cilindros e cones

Os sólidos redondos básicos são os cones, cilindros e esferas (ver figura 4.53). Nesta seção serão mostradas as representações de cones e cilindros retos. A representação da esfera será mostrada no item 4.9.6.

Figura 4.53 - Geratrizes do cilindro, cone e esfera



Fonte: Barison, 2022<sup>4</sup>.

Uma maneira de gerar uma superfície cilíndrica é partir de um eixo, de uma reta geratriz (paralela a este eixo) e de uma diretriz (circunferência) e fazer com que a reta geratriz seja movida em torno do eixo por toda a diretriz<sup>5</sup>. Raciocínio análogo pode ser usado para gerar uma superfície cônica. Parte-se

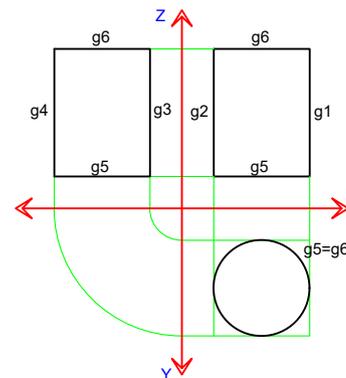
4 Disponível em: [http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/img/gif/gd/gd\\_16t/1.gif](http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/img/gif/gd/gd_16t/1.gif). Acesso: 20 set 2022.

5 As superfícies redondas como cones, cilindros e esferas estão sujeitas às leis de geração. Como o próprio nome diz, leis de geração são maneiras de se criar, ou gerar, as superfícies redondas (ver capítulo 6 para maior aprofundamento).

de um eixo, de uma reta geratriz (concorrente a este eixo) e de uma diretriz (circunferência) e ao mover a geratriz em torno do eixo por toda a diretriz tem-se uma superfície cônica. A quantidade de geratrizes em cada sólido é ilimitada, no entanto, quando representamos esses sólidos, precisamos mostrar apenas algumas delas, as Geratrizes de Limite de Visibilidade (GLV) que, como o nome já diz, é a geratriz que marca o limite da superfície que está sendo visualizado pelo observador em cada projeção. Consequentemente, cada projeção possui suas GLVs. No caso de uma peça representada em diferentes tipos de projeção, as geratrizes não serão, necessariamente, as mesmas, pois elas mudam de uma projeção para outra.

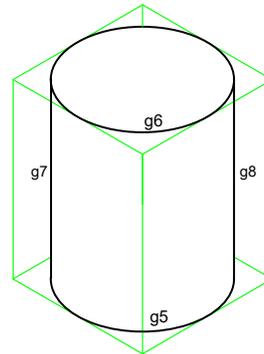
As figuras abaixo mostram um mesmo cilindro representado no Sistema de Vistas, em Isometria Simplificada e em Cavaleira (ver figuras 4.54, 4.55 e 4.56). É possível observar que em cada tipo de representação são apresentadas diferentes geratrizes de limite de visibilidade do cilindro: no Sistema de Vistas, na vista F ( $g_1$  e  $g_2$ ), na vista LD ( $g_3$  e  $g_4$ ); na Isometria Simplificada  $g_7$  e  $g_8$ ; na Cavaleira  $g_9$  e  $g_{10}$ . Já as geratrizes curvas são as mesmas nessas três projeções mostradas,  $g_5$  e  $g_6$ . No entanto vale salientar que  $g_5$  e  $g_6$  nas vistas F e LD estão reduzidas a retas, já na Isometria Simplificada e na Cavaleira elas tomam forma de elipse.

Figura 4.54 - Vistas de um cilindro mostrando suas GLVs



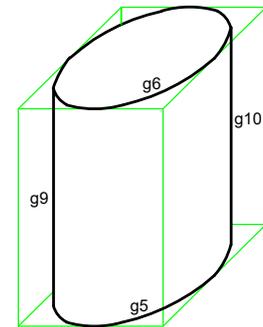
Fonte: Autoras.

Figura 4.55 - Isometria Simplificada do mesmo cilindro da figura 4.54, mostrando suas GLVs



Fonte: Autoras.

Figura 4.56 - Cavaleira do mesmo cilindro da figura 4.54, mostrando suas GLVs



Fonte: Autoras.

Observe, por exemplo, que na vista F da figura 4.54 as GLVs curvas são g5 e g6 e as GLVs retas são g1 e g2. Quando se observa a vista LD da mesma figura tem-se novamente g5 e g6 como GLVs curvas, mas as GLVs retas são g3 e g4. O mesmo vai ocorrer nas representações para Isometria Simplificada e Cavaleira. Observe que na Isometria Simplificada, figura 4.55, g7 e g8 são as GLVs retas, já na Cavaleira, figura 4.56, as GLVs retas são g9 e g10.

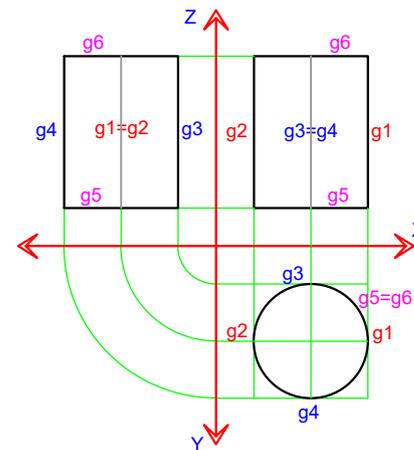
As GLVs curvas g5 e g6 são comuns a todas as representações, mas as GLVs retas mudam de uma projeção para a outra. É muito importante ter essa percepção no momento em que se está representando, pois um erro muito comum é achar que as GLVs visualizadas em uma representação serão as mesmas para uma nova representação. Por exemplo, se um determinado objeto está representado no Sistema de Vistas e se quer sua representação em Isometria Simplificada, tem-se que saber que as GLVs observadas no Sistema de Vistas são diferentes das GLVs representadas em Isometria Simplificada e vice-versa. O mesmo vai ocorrer no caso da Cavaleira.

Um **exercício fundamental** para ajudar na compreensão da percepção das GLVs é imaginar onde estariam as GLVs de cada representação

da peça nas outras representações da mesma peça, ou seja, onde estariam  $g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7, g8, g9$  e  $g10$  em todas as representações.

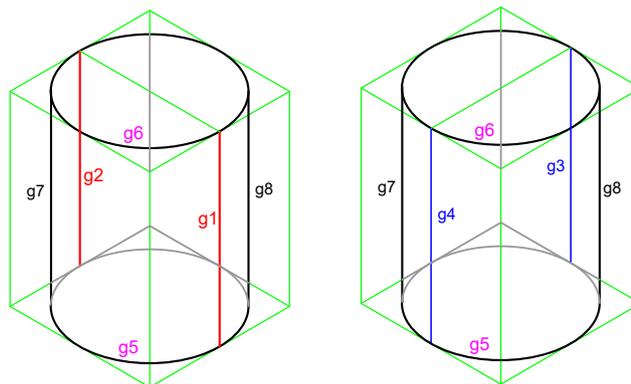
Ao comparar a figura 4.57 às figuras 4.58 e 4.59 é possível fazer um paralelo para cada par de geratrizes e perceber dois aspectos principais. O primeiro aspecto está relacionado às arestas curvas. Percebe-se que em todas as formas de representação apenas as geratrizes curvas se mantêm as mesmas ( $g5$  e  $g6$ ), enquanto que os pares de geratrizes retas mudam a depender do tipo de projeção. As GLVs retas no Sistema de Vistas, figura 4.57, são  $g1, g2, g3$  e  $g4$ ; na Isometria Simplificada, figura 4.58, são  $g7$  e  $g8$ ; e na Cavaleira, figura 4.59, são  $g9$  e  $g10$ .

Figura 4.57 - Três vistas do cilindro com destaque para as GLVs



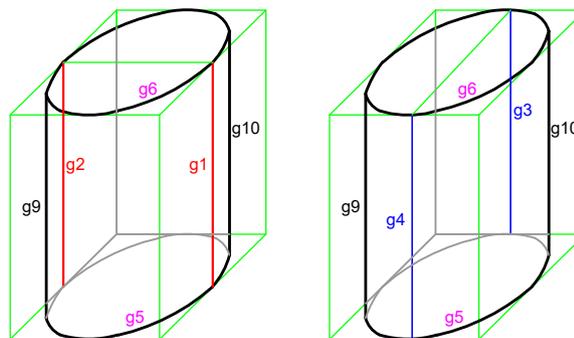
Fonte: Autoras.

Figura 4.58 - Isometria Simplificada do cilindro com destaque para as GLVs



Fonte: Autoras.

Figura 4.59 - Cavaleira do cilindro com destaque para as GLVs

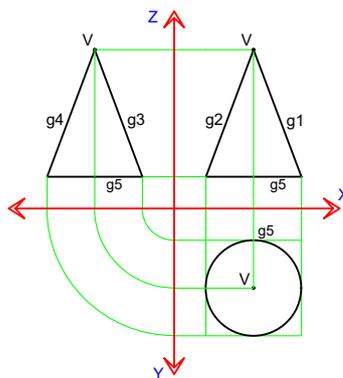


Fonte: Autoras.

O segundo aspecto tem a ver com as geratrizes retas. Nas representações, apenas as GLVs “aparecem” em linha contínua grossa, já as outras geratrizes não “aparecem”, ou seja, estão nas projeções apenas como linhas de construção (contínua fina). O importante é entender que mesmo sem “aparecer” elas são parte das representações e mantêm suas propriedades geométricas. Tal fato tem grande importância não somente na construção das representações, mas também no estudo de outros conteúdos como, por exemplo, Seção Plana, pois elas auxiliarão na construção de resoluções que serão estudadas no Capítulo 6.

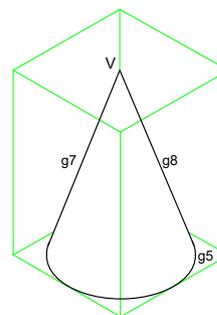
Observando as figuras abaixo se percebe que o mesmo vai ocorrer no caso da representação do cone. No entanto, vale ressaltar que as geratrizes retas agora concorrem no vértice (ver figuras 4.60, 4.61 e 4.62).

**Figura 4.60 - Vistas de um cone mostrando suas GLVs**



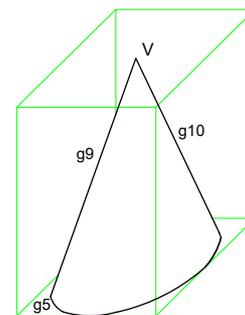
Fonte: Autoras.

**Figura 4.61 - Isometria Simplificada do mesmo cone da figura 4.60, mostrando suas GLVs**



Fonte: Autoras.

**Figura 4.62 - Cavaleira do mesmo cone da figura 4.60, mostrando suas GLVs**

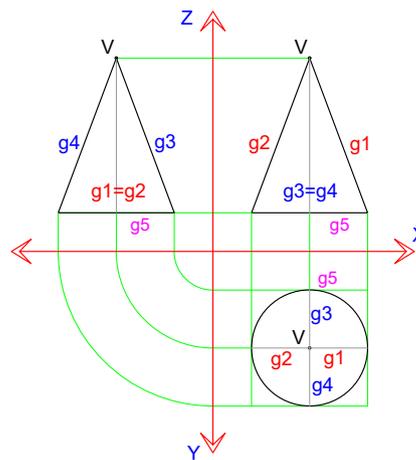


Fonte: Autoras.

sumário

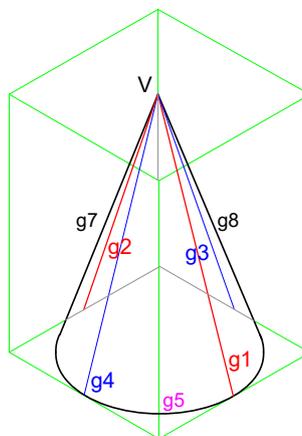
Para ajudar na compreensão da percepção das GLVs propõe-se realizar o mesmo exercício que foi feito para o cilindro, ou seja, imaginar onde estão as geratrizes em cada uma das projeções abaixo (ver figuras 4.63, 4.64 e 4.65).

Figura 4.63 - Vistas de um cone com destaque para as GLVs



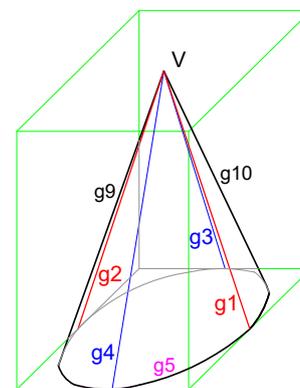
Fonte: Autoras.

Figura 4.64 - Isometria Simplificada de um cone com destaque para as GLVs



Fonte: Autoras.

Figura 4.65 - Cavaleira de um cone com destaque para as GLVs

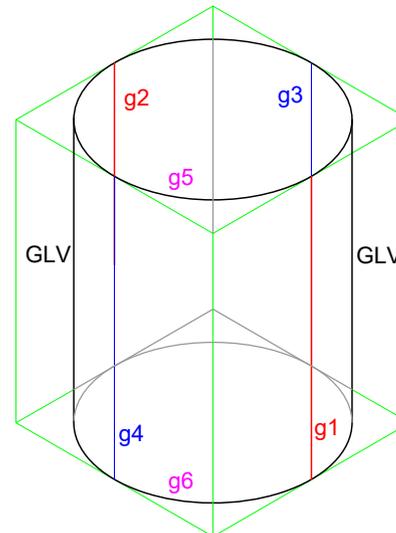


Fonte: Autoras.

#### 4.9.4 Cilindros

Como já foi discutido no item 2.8.1, o cilindro é um sólido que possui um eixo, uma diretriz e várias geratrizes. A representação de cilindros em vistas ocorre como a representação de qualquer sólido geométrico estudado até o momento. Primeiramente, há a identificação do sistema de representação utilizado na figura dada. Em seguida, se dá a compreensão da volumetria e das propriedades geométricas da peça, essa etapa é feita, usualmente, por meio da representação do OR na peça dada. Então, são definidas as vistas que irão ser mostradas na representação em é pura para que seja feita a organização da localização das mesmas. No caso da figura 4.66 estão sendo mostradas as vistas F, S e LD. Por uma escolha didática, as vistas a serem representadas no Sistema de Vistas serão as mesmas.

Figura 4.66 - Isometria Simplificada de um cilindro com destaque para as GLVs



Fonte: Autoras.

Na figura 4.66, tem-se um cilindro com seu OR e oito das suas geratrizes destacadas. Primeiramente, foram destacadas as duas GLVs retas da Isometria Simplificada, que estão presentes em qualquer representação de sólidos que possuem superfícies curvas. Isso porque superfícies dessa natureza não possuem arestas, logo a superfície curva aparece na forma de duas arestas. As GLVs servem para marcar os limites de visibilidade do observador quando este observa a peça. As outras seis geratrizes destacadas na figura 4.66 são:

- g1 e g2: GLVs da vista F;
- g3 e g4: GLVs das vistas LD e LE;
- g5 e g6: GLVs das vistas S e I.
- Embora a figura trate de um cilindro representado em Isometria Simplificada, é importante saber a localização das geratrizes g1, g2, g3 e g4, uma vez que elas são especialmente úteis para o entendimento da peça e para sua subsequente construção em outros tipos de projeção.

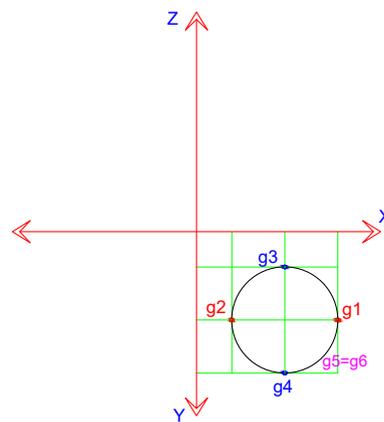
As GLV's sempre tangenciam as circunferências das faces planas do cilindro (base e topo) e a depender do tipo de representação adotado o par de GLVs pode variar. Por exemplo, se a peça for representada em Isometria Simplificada as GLVs são as que vemos na figura 4.66, mas se a peça for representada em Cavaleira outro par de GLVs será representado (conteúdo explicado no item 4.9.3).

Para representar o cilindro da figura 4.66 utilizando o Sistema de Vistas procede-se como nos sólidos já estudados até o momento, ou seja, escolhe-se uma das vistas para se iniciar a representação. Quando se está trabalhando com sólidos que possuem superfícies curvas é interessante iniciar a representação pela vista que contém a curva (geratrizes g5 e g6), no caso do cilindro da figura 4.66, seria a vista S. Isso é especialmente importante tanto quando se está desenhando à mão livre, como com instrumentos, pois ajuda a manter a precisão na representação. Para representar

a vista S, foi definida uma medida de afastamento do sólido para os planos de projeção, que se traduz na distância existente entre o OR e as LTs. É interessante que essa medida de afastamento seja a mesma em todas as vistas. Em seguida, o quadrilátero que circunscreverá a circunferência é representado (geratrizes g5 e g6). Dentro dele se constrói uma circunferência que será a vista S da peça. Na circunferência, é possível identificar as quatro geratrizes em VB (g1, g2, g3 e g4) (ver figura 4.67).

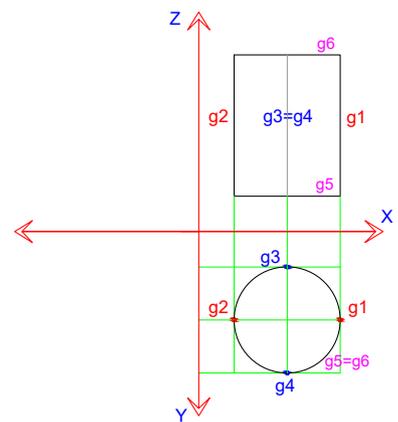
Na vista F as GLVs do cilindro são g1, g2, g5, e g6 (ver figura 4.68). Para representar a vista F do cilindro é necessário levar as linhas de chamada que partem das arestas do quadrilátero até o quadrante onde ficará a vista F. Para definir a altura de g1 e g2 basta buscar essa medida no OR da Isometria Simplificada e marcá-la sobre as linhas de chamada. Pode-se ainda representar as GLVs da vista LD, g3 e g4 na vista F. A diferença é que g1, g2, g5 e g6 são marcadas com linhas grossas de aresta visível enquanto g3 e g4 são marcadas com linhas finas, de construção ou auxiliares.

**Figura 4.67 - Vista superior de um cilindro com destaque para as GLVs**



Fonte: Autoras.

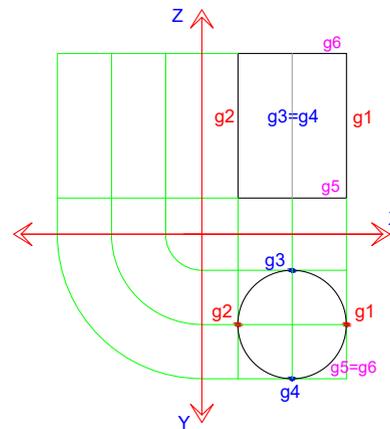
**Figura 4.68 - Vistas superior e frontal de um cilindro com destaque para as GLVs**



Fonte: Autoras.

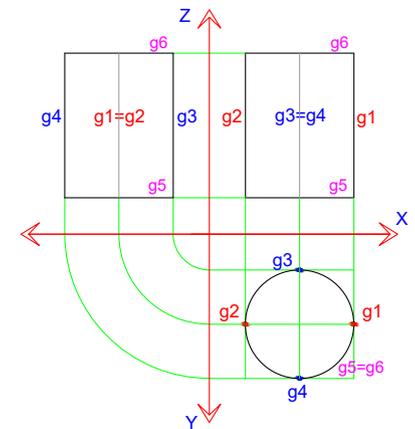
Na vista LD as GLVs são g3, g4 e, novamente, g5 e g6, ver figura 4.69. Para representar a vista LD, é necessário levar as linhas de chamada que partem das vistas S e F. Quando elas se cruzam no quadrante em que fica a vista LD a vista está praticamente pronta. Na vista LD se pode ainda marcar as GLVs da vista F (g1 e g2). As GLVs g3, g4, g5 e g6 são marcadas com linhas grossas enquanto g1 e g2 são marcadas com linhas finas, como mostra a figura 4.70.

Figura 4.69 - Construção da vista lateral direita de um cilindro



Fonte: Autoras.

Figura 4.70 - Três vistas de um cilindro com destaque para as GLVs



Fonte: Autoras.

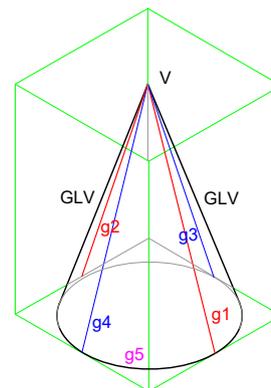
Com as três vistas representadas se observa que na vista S estão representadas as superfícies planas do cilindro através das GLVs g5 e g6, que estão coincidentes. Já a vista F mostra a extensão de visibilidade do observador, a qual compreende o arco g1g4g2 (ver na vista S). Já o que está no arco g1g3g2 fica fora do limite de visibilidade do observador. A vista LD mostra a extensão de visibilidade do observador que compreende o arco g3g1g4 (ver na vista S), enquanto que o arco g3g2g4 fica fora do limite de visibilidade do observador.

#### 4.9.5 Cones

Cones, assim como cilindros, possuem superfícies de diferentes naturezas, uma é plana e outra que é curva. Conseqüentemente, os procedimentos para a representação de cones no Sistema de Vistas se assemelham aos procedimentos da representação do cilindro nesse sistema, estudados no item anterior. No entanto, os cones possuem um elemento que os cilindros não possuem, o vértice. Tal ente geométrico é o ponto de convergência de todas as geratrizes do cone, conseqüentemente, das GLVs, como pode ser observado na figura 4.71. Sua localização é muito importante na determinação das vistas desse sólido.

No caso da figura 4.71 estão sendo mostradas as vistas F, S e LD da Isometria Simplificada. Por uma escolha didática, as vistas a serem representadas no Sistema de Vistas serão as mesmas. A representação de um cone segue a mesma lógica da representação de qualquer sólido geométrico. Primeiramente, há a identificação das propriedades geométricas do objeto na figura dada. Essa etapa acontece com a identificação do sistema de representação utilizado, no caso da figura 4.71, tem-se uma Isometria Simplificada. Depois, se dá a compreensão da volumetria da peça, essa etapa é feita, usualmente, por meio da representação do OR na peça dada.

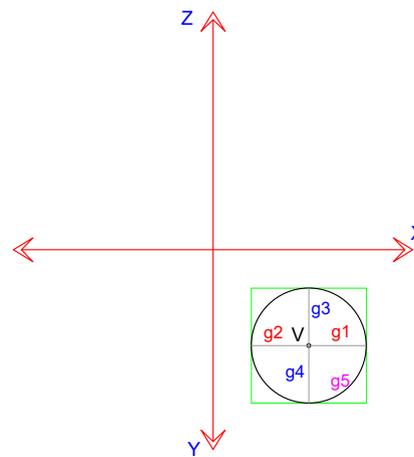
**Figura 4.71 - Isometria Simplificada de um cone com destaque para as GLVs**



Fonte: Autoras.

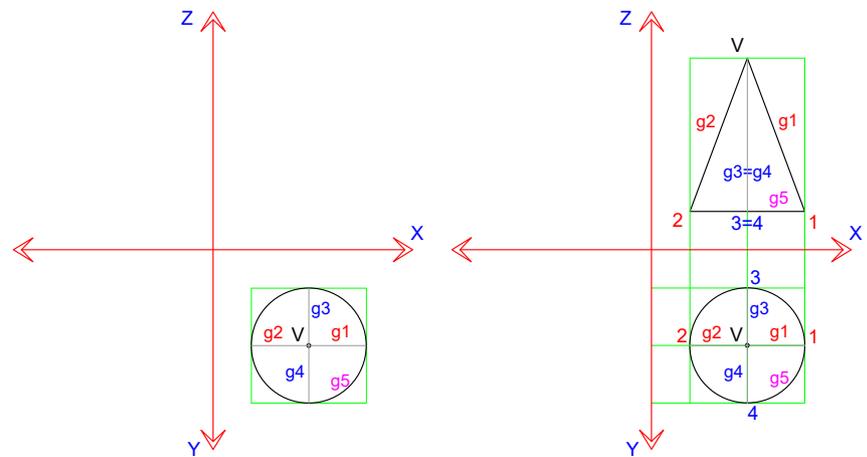
No caso do exemplo tratado neste item, a representação no Sistema de Vistas também vai ter início com a vista S. Como mostra a figura 4.72, a representação dessa vista consiste na construção de uma circunferência, que é a GLV  $g_5$  (circunscrita por um quadrilátero que representa a vista S do OR) e na localização do vértice do cone no centro dela. Nota-se que não há GLVs na vista S, pois quando visto de cima o cone não possui arestas.

Figura 4.72 - Vista superior de um cone com destaque para as GLVs



Fonte: Autoras.

Figura 4.73 - Vistas superior e frontal de um cone com destaque para as GLVs



Fonte: Autoras.

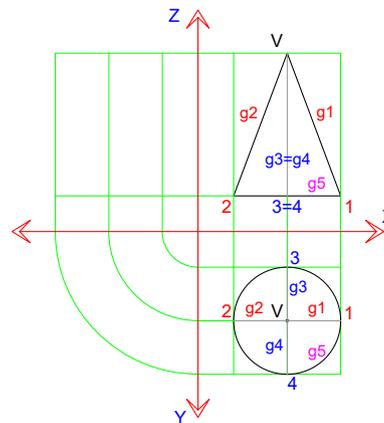
A figura 4.73 mostra o segundo momento da representação no Sistema de Vistas que tem início com a localização dos limites laterais do cone ainda na vista S, que são as geratrizes com base nos pontos 1, 2, 3 e 4. Com tais pontos também se pode localizar as GLVs da vista F ( $g_1$  e  $g_2$ ). Nas vistas F e S foram marcadas as GLVs da vista LD, que são  $g_3$  e  $g_4$ . Para construir a vista F, tem-se que subir as linhas de chamada a partir dos pontos 1, 2 e V e nelas marcar o afastamento do objeto até o plano  $\pi_1$  e a altura do cone. Isso é feito por meio de duas linhas paralelas ao eixo x. Com o auxílio das linhas de chamada que partem da vista S e da malha de linhas no quadrante

da vista F, localiza-se os pontos 1 e 2 que estão na base do cone e o ponto V que está no ponto mais alto do cone. Ao conectar, com linhas contínuas grossas, os pontos V aos pontos 1 e 2 tem-se as GLVs g1 e g2. Conecta-se também o ponto 1 ao ponto 2, finalizando assim, a representação da vista F do cone.

Para construir a vista LD, é preciso levar as linhas de chamada que partem das vistas já construídas, como mostra a figura 4.74. Com isso tem-se uma malha de linhas que faz a construção da vista LD ser uma repetição do procedimento anterior. É preciso apenas atentar para a localização das GLVs já que nesta vista é o par de GLVs g3 e g4 que aparece com linha contínua grossa, como mostra a figura 4.75.

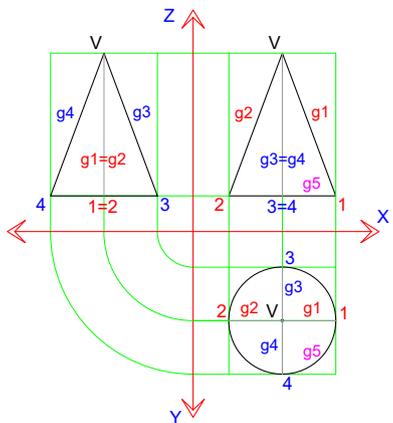
Da mesma forma que ocorre com o cilindro, nas vistas F e LD as GLVs marcam a extensão da visibilidade do observador. No caso da vista F, as GLVs limitam o que se vê na parte frontal da peça, ou seja, o que está compreendido no arco 241 (ver vista S). Já no caso da vista LD, ela mostra o que se vê no arco 314.

**Figura 4.74 - Construção da vista lateral direita de um cone com destaque para as GLVs**



Fonte: Autoras.

**Figura 4.75 - Três vistas de um cone com destaque para as GLVs**

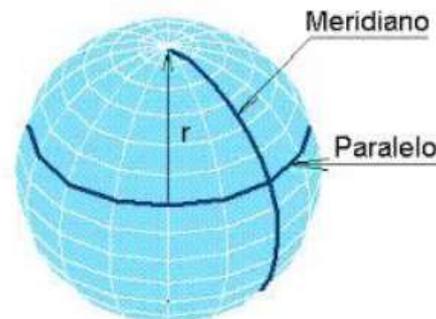


Fonte: Autoras.

#### 4.9.6. Esferas

A esfera é um sólido geométrico que possui uma característica marcante em relação aos outros sólidos, ele possui uma única superfície e ela é curva. Consequentemente, a esfera não possui arestas ou vértices, ela só possui geratrizes e elas são curvas. Há dois tipos de geratrizes curvas: os meridianos e os paralelos, como aparece na figura 4.76.

Figura 4.76 - Meridiano e paralelo de uma esfera



Fonte: Barison, 2022<sup>6</sup>.

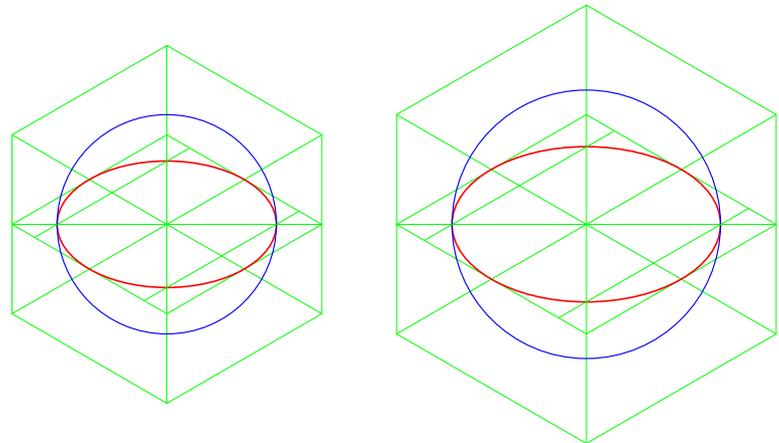
Não é usual representar a esfera em Cavaleira porque ela fica deformada ao ponto de deixar de parecer uma esfera. Dessa forma, a representação da esfera é feita no Sistema de Vistas e em Isometria (Exata ou Simplificada).

Conforme vimos no capítulo 3, na Isometria (Exata) as medidas dos objetos que são paralelas aos eixos coordenados sofrem uma deformação natural de 0,816 na altura, na largura e na profundidade. No entanto, a representação do **Contorno Aparente da Esfera (CAE)** que aparece na figura 4.77 em azul não sofre deformação. Isso ocorre porque embora as medidas do OR sofram uma deformação natural (0,816) a superfície visível da esfera não sofre deformação, consequentemente, o CAE tem o diâmetro da própria esfera.

6 Disponível em: [http://www.mat.uel.br/geometria/php/gd\\_t/gd\\_15t.php](http://www.mat.uel.br/geometria/php/gd_t/gd_15t.php). Acesso em: 20 set 2022.

Para representar a esfera em Isometria Simplificada vai ocorrer o contrário, ou seja, como as medidas que estão paralelas aos eixos coordenados sofrem deformação, a qual é desconsiderada, a representação do CAE (que na Isometria Exata não sofre deformação) será deformada em 0,816, para que ela possa compensar a deformação das outras medidas, como mostra a figura 4.78.

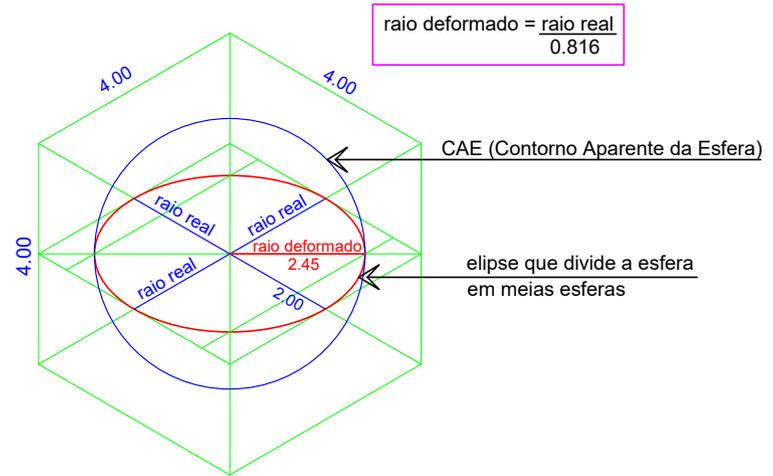
**Figuras 4.77 e 4.78 - Isometria Exata e Isometria Simplificada, respectivamente**



Fonte: Autoras.

A figura 4.79 traz um exemplo de como representar uma esfera de raio igual a 2cm em Isometria Simplificada. Primeiramente, representa-se o OR com suas medidas reais (lado = 4cm). Em seguida, representa-se o CAE, para isso centra-se o compasso no centro do OR com abertura igual ao raio da esfera, mas atenção! O raio real (2cm) deve ser dividido pelo fator de deformação 0,816 para que o CAE fique proporcional à Isometria Simplificada, ou seja, o raio deformado mede 2,45cm.

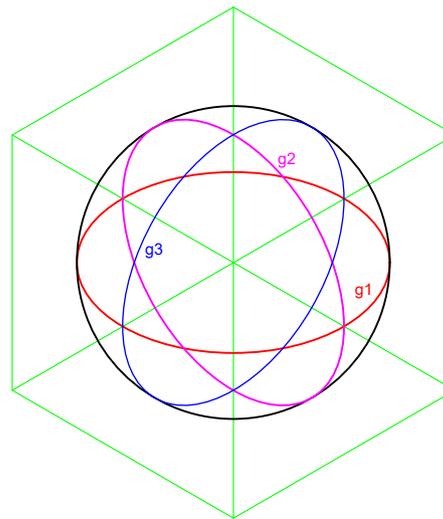
Figura 4.79 - Elementos de uma esfera



Fonte: Autoras.

Para representar uma meia esfera, primeiro representa-se um plano paralelo ao chão e que divide o OR ao meio. Depois, nesse plano, representa-se uma elipse. Uma curiosidade importante é que quando se está trabalhando com uma meia esfera é possível representar o CAE sem ter que dividir o raio real por 0,816. Para isso representa-se a elipse que dividirá a esfera ao meio e observa-se os raios (real e deformado na representação, como mostra a figura 4.79). Os raios paralelos aos eixos coordenados estão em medida real, ou seja, 2 cm, mas o raio no sentido horizontal (que não está paralelo a nenhum eixo) já está representado com a deformação desejada, como mostra a figura 4.79. Então centra-se o compasso no centro geométrico do OR – ponto que une as vistas F, S e LD – com abertura igual ao raio deformado e traça-se o CAE.

Figura 4.80 - Geratrizes de uma esfera



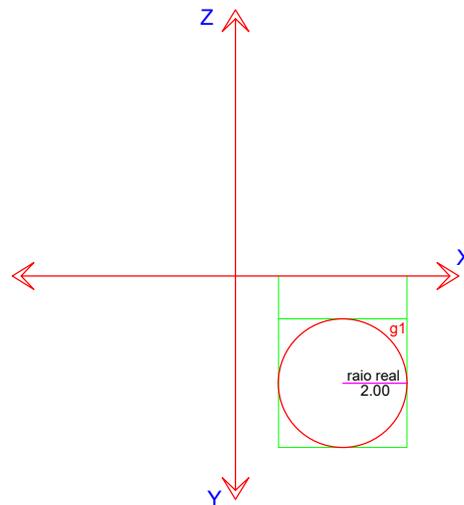
Fonte: Autoras.

A representação da esfera no Sistema de Vistas se assemelha de certa forma à representação do cone e do cilindro. Isso ocorre porque no caso da esfera também se tem GLVs. Tal representação tem início com a identificação do sistema de representação utilizado. Em seguida, dá-se a compreensão da volumetria de peça, essa etapa é feita, usualmente, por meio da representação do OR na peça dada, ver figura 4.80. Depois, são identificadas as propriedades geométricas da peça.

Na representação da vista S o observador vê apenas uma circunferência, como mostra a figura 4.81. Essa circunferência representa a GLV da vista S,  $g_1$ , da esfera. Tal geratriz corresponde a um dos meridianos da esfera e, se uma analogia ao Planeta Terra for feita, é possível dizer que  $g_1$  é equivalente à linha do Equador.

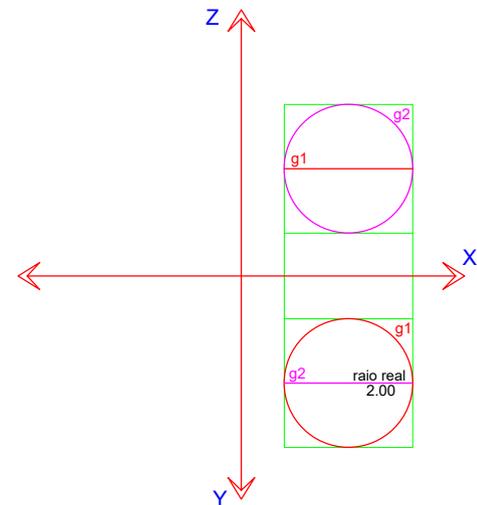
Para representar a vista F, mostrada na figura 4.82, traçam-se duas tangentes à  $g1$  na vista S, que serão as linhas de chamada que vão levar as medidas de largura para a vista F. Sobre essas linhas marca-se o diâmetro da esfera e fecha-se a vista F do OR. Com isso é possível traçar a GLV da vista F,  $g2$  da esfera. Assim como a  $g1$ , a  $g2$  corresponde a um dos meridianos da esfera.

Figura 4.81 - Vista superior de uma esfera



Fonte: Autoras.

Figura 4.82 - Vistas superior e frontal de uma esfera

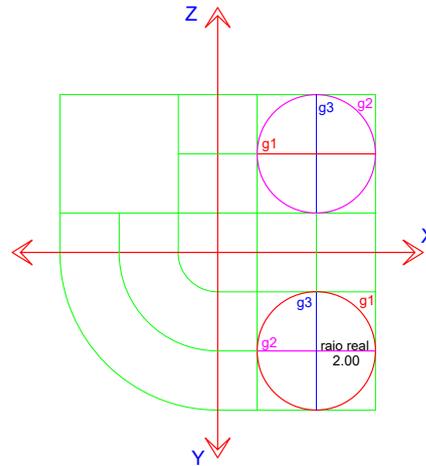


Fonte: Autoras.

Para finalizar, faz-se a representação da vista LD da esfera (ver figura 4.83). Por meio de linhas de chamadas tangentes à  $g1$  na vista S, e à  $g2$  na vista F, cria-se uma malha de linhas que é a vista LD do OR e, assim, traça-se a GLV  $g3$ , da vista LD, que também corresponde a um dos meridianos da esfera, como mostra a figura 4.84.

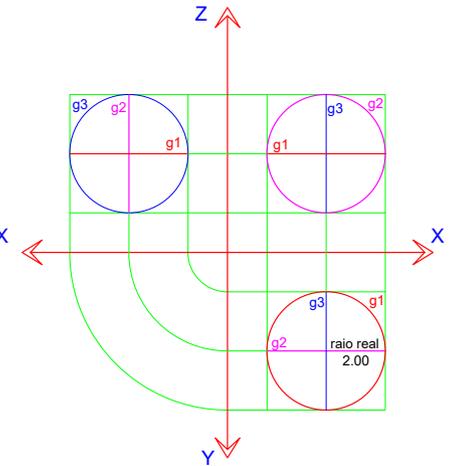
Para efeitos didáticos foram indicadas as posições de todas as GLVs em todas as vistas. Conclui-se assim, que as linhas de chamada são retas tangentes às GLVs de cada vista da esfera.

Figura 4.83 - Construção da vista lateral direita de uma esfera



Fonte: Autoras.

Figura 4.84 - Vistas superior, frontal e lateral direita de uma esfera



Fonte: Autoras.

#### 4.9.7 Partes da esfera

Para representar partes de uma esfera é comum imaginar planos seccionando-a, como se estivessem “fatiando” a esfera. Como a esfera possui somente geratrizes curvas (meridianos e paralelos) a seção plana de uma esfera, em três dimensões, sempre resulta em uma circunferência. Já as representações (duas dimensões) da seção plana, da esfera (fatiamento) podem resultar em circunferências, arcos de circunferências ou elipses. De forma que a representação final das partes da esfera poderá ser composta por circunferências, arcos de circunferências, elipses, arcos de elipses, GLVs e o CAE.

Dessa maneira, a depender do posicionamento do plano de seção, os seguintes sólidos podem ser gerados:

- Meias esferas: 6 possibilidades (ver figuras 4.85, 4.86 e 4.87);
- Quartos de esfera: 12 possibilidades (ver figura 4.88);
- Oitavos de esfera: 24 possibilidades (ver figura 4.89).

**Observações importantes:**

√ Para não confundir o CAE das elipses nas partes da esfera, representam-se todos os planos de corte, bem como todas as partes de elipse necessárias para a construção da figura;

√ Para construção de:

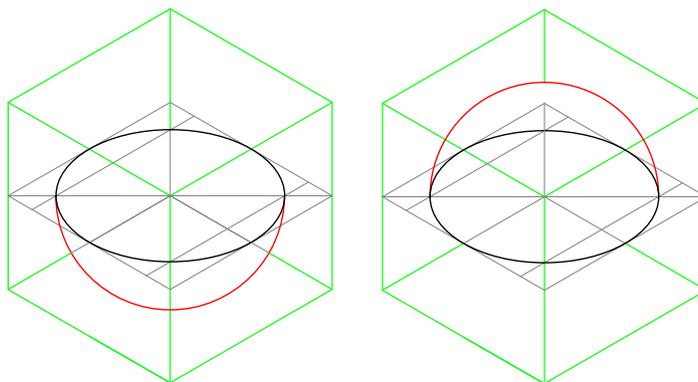
- 1/2 da esfera serão necessários um plano de corte e uma elipse completa (ver figuras 4.85, 4.86 e 4.87);
- 1/4 da esfera serão necessários dois planos de corte, cada um contendo 1/2 de elipse (ver figura 4.88);
- 1/8 da esfera, serão necessários três planos de corte, cada um contendo 1/4 de elipse (ver figura 4.89);
- Partes de esfera cujos planos de corte não passam pelo centro da esfera exigirão um trabalho referenciado pelo OR.

Atenção para as cores: em todas as imagens o OR e as linhas de construção estão em **verde**; os arcos de elipse (que representam circunferências na realidade) estão em **preto**; e os CAEs estão em **vermelho**.

#### 4.9.7.1 Meias esferas

Considerando uma esfera dentro de um OR e utilizando **um** plano que passe obrigatoriamente no centro da esfera, este a divide em duas meias esferas. Com relação às possibilidades de posicionamento desse plano de seção, ele pode estar no sentido horizontal ou vertical. No sentido horizontal temos duas possibilidades de representação, a meia esfera inferior e a meia esfera superior, como mostra a figura 4.85.

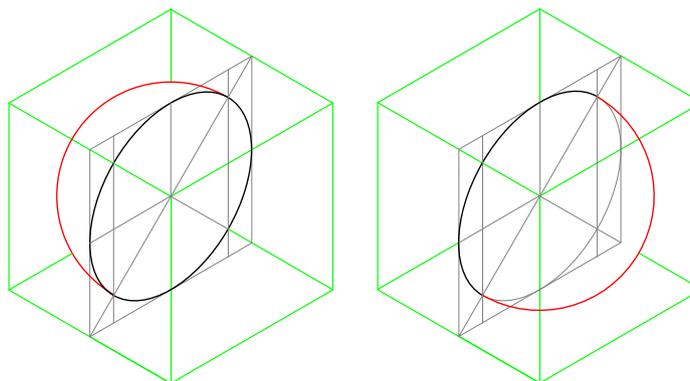
**Figura 4.85 - Exemplos de metades de esferas  
com plano de seção paralelo aos eixos x e y.**



Fonte: Autoras.

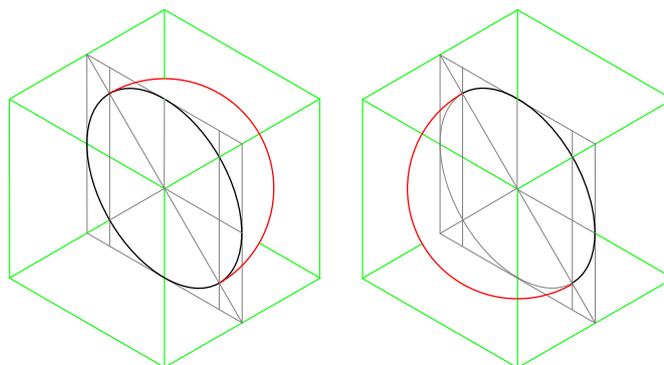
Com relação ao plano vertical temos quatro possibilidades de representação. Conforme mostram as figuras 4.86 e 4.87.

**Figura 4.86 - Exemplos de metades de esferas  
com plano de seção paralelo aos eixos y e z**



Fonte: Autoras.

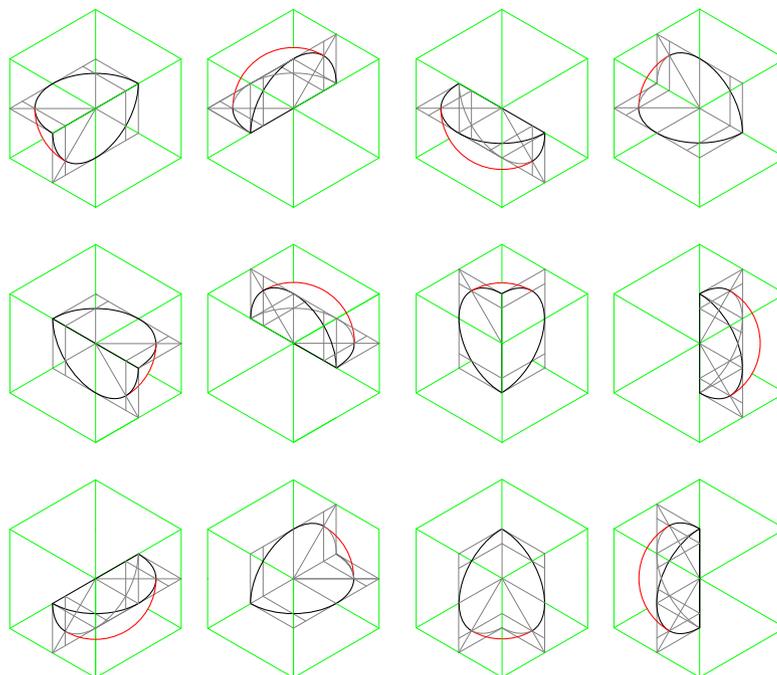
Figura 4.87 - Exemplos de metades de esferas  
com plano de seção paralelo aos eixos x e z



Fonte: Autoras.

#### 4.9.7.2 Quartos de esfera

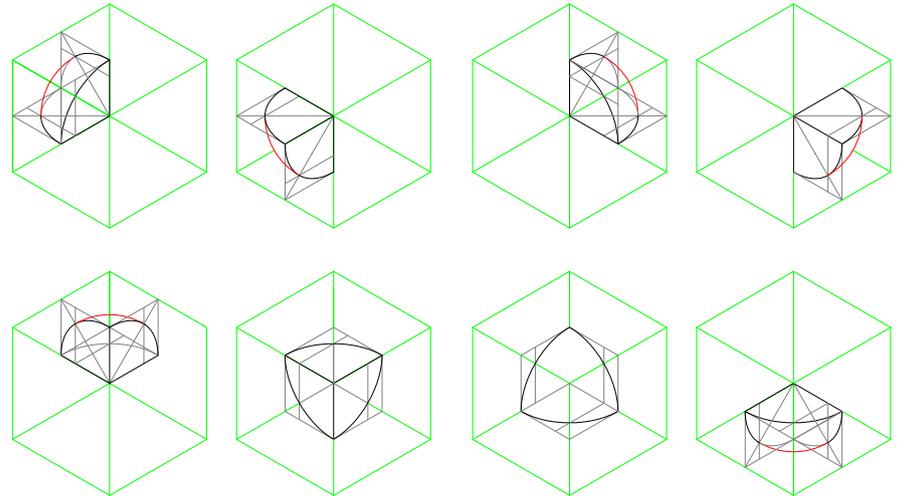
Figura 4.88 - Quartos de esfera, 12 possibilidades



Fonte: Autoras.

#### 4.9.7.3 Oitavos de esfera

**Figura 4.89 - Oitavos de esfera, mostrando  
oito dentre as 24 possibilidades**



Fonte: Autoras.

The background features a warm orange-red color with a complex geometric pattern of overlapping circles and lines. A large, bold yellow number '5' is positioned in the upper right quadrant. Below it, the words 'VERDADEIRA' and 'GRANDEZA' are written in white, bold, uppercase letters.

**5**

**VERDADEIRA  
GRANDEZA**

## 5.1 DEFINIÇÕES E USOS

O termo Verdadeira Grandeza (VG) se refere às medidas angulares e lineares reais de arestas ou faces de um objeto. Em áreas como Arquitetura, Engenharias, Design e Expressão Gráfica o conhecimento das medidas reais de um objeto, ou VGs, é imprescindível em diversas situações como, por exemplo, o cálculo de áreas. De fato, sem o conhecimento da real medida do perímetro de uma superfície é impossível realizar o cálculo de sua área com precisão.

Saber “ler” ou, mais ainda, saber extrair as VGs de um objeto que está representado no Sistema de Vistas é importante não somente para cálculo de áreas, mas também para a realização de diversas outras atividades da prática profissional dessas áreas do conhecimento como, por exemplo, a análise de projetos e a elaboração de pareceres técnicos.

Nem sempre as características geométricas do objeto representadas em projeções possibilitam a extração direta de suas VGs, pois, há casos em que mesmo com todas as vistas de um objeto, não se têm todas as partes deste objeto em VG. Para lidar com situações dessa natureza é necessário dominar o uso de operações gráficas para, assim, determinar a VG de superfícies ou de arestas.

A Geometria Descritiva dispõe de algumas operações gráficas para isso, as principais são:

- Mudança de Plano;
- Rotação; e
- Rebatimento.

Todas as operações citadas possuem o mesmo objetivo, que é o de determinar a VG de objetos geométricos. No entanto, nesse livro optou-se por trabalhar com a operação da Mudança de Plano para determinar a VG de faces e arestas. Isso ocorre por que ela é uma operação versátil, uma vez que com ela é possível resolver qualquer caso de obtenção de VG.

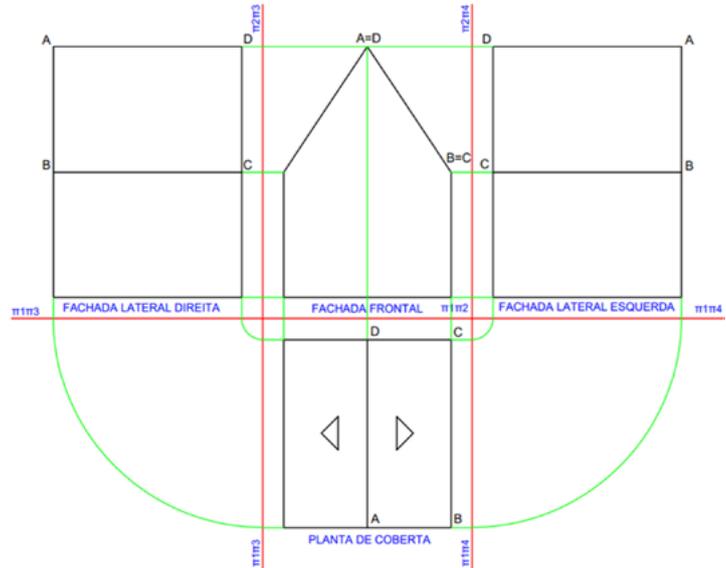
### 5.1.1 Compreendendo a relação entre as três posições básicas dos elementos geométricos e a visualização da VG

Para compreender o conceito de VG é imprescindível conhecer as posições básicas de referência posicional entre os elementos geométricos que compõem um objeto (arestas ou faces) e, principalmente, entre os elementos desse objeto e os planos de projeção.

São três as posições básicas que um ente geométrico pode assumir, são elas: paralela, perpendicular e oblíqua. Em outras palavras, arestas e faces podem estar paralelas, perpendiculares ou oblíquas entre si ou em relação aos seis planos de projeção do Sistema de Vistas. Tais posições já foram estudadas no Capítulo 4, onde o Sistema de Vistas foi trabalhado. No entanto, o que será feito agora é compreender como cada uma dessas posições pode interferir na visualização da VG de arestas e superfícies.

A figura 5.1 mostra uma casa representada de maneira esquemática no Sistema de Vistas através das vistas: F, S, LD e LE. Na referida figura tem-se a face ABCD que compõe a coberta (ou cobertura) da casa, a qual é composta por quatro arestas: AD, BC, AB e DC.

Figura 5.1 - Vistas de casa esquemática



Fonte: Autoras.

Numa primeira leitura da posição da aresta AD, em todas as vistas representadas na figura 5.1, é possível concluir que na vista S (plano  $\pi_1$ ), a aresta AD é representada por um segmento de reta. Já na vista F (plano  $\pi_2$ ), AD está representada por um único ponto. Finalmente, nas vistas LD (plano  $\pi_3$ ) e LE (planos  $\pi_4$ ) AD aparece novamente representada por um segmento de reta em cada uma dessas vistas. Desse modo, é possível localizar a aresta AD em todas as vistas dadas na figura 5.1.

A seguir faz-se a interpretação da posição dessa aresta em relação a cada plano de projeção. Como resultado é possível concluir que somente na vista F a aresta AD parece como um ponto. Isso quer dizer que essa aresta está perpendicular ao plano que contém essa vista (plano  $\pi_2$ ).

Todas as vezes que um elemento geométrico está perpendicular a um plano de projeção, diz-se que ele está em Vista Básica (VB) nesse plano. Dessa maneira, a aresta AD está em VB na vista F. Já com relação aos outros três planos de projeção  $\pi_1$  (vista S),  $\pi_3$  (vista LD) e  $\pi_4$  (vista LE), o segmento AD aparece com sua dimensão real. Assim, é possível afirmar que a aresta AD está paralela a todos eles. Isso significa que em tais vistas a aresta AD está em VG. É importante ressaltar que um objeto somente aparecerá em VG num plano de projeção se, e somente se, esse objeto estiver paralelo a esse plano.

Na mesma figura 5.1, a aresta AB está representada por um segmento de reta em todas as vistas. No entanto, observe que ela aparece com diferentes tamanhos. Isso significa que ela não está na mesma posição com relação a todos os planos de projeção. Na vista F a aresta AB está em VG porque está paralela ao plano  $\pi_2$ . É possível afirmar isso porque é fácil de verificar que ela está paralela à LT ( $\pi_1\pi_2$ ). Já nas outras três vistas ela aparece com dimensões reduzidas em relação à suas medidas reais. Isso ocorre porque ela está oblíqua a tais planos de projeção ( $\pi_1$ ,  $\pi_3$  e  $\pi_4$  das vistas S, LD e LE respectivamente).

É possível concluir então que a depender da posição da aresta com relação aos planos de projeção, essa aresta está em VG, em VB ou com dimensões reduzidas. Tais possibilidades estão sintetizadas no quadro abaixo:

**Quadro 5.1 - Resumo das posições que um objeto pode tomar em relação a um plano de projeção e as suas conseqüentes representações**

objeto paralelo ao plano de projeção	=	objeto em verdadeira grandeza (VG)
objeto perpendicular ao plano de projeção	=	objeto em vista básica (VB)
objeto oblíquo ao plano de projeção	=	objeto com dimensões reduzidas

Fonte: Autoras.

O mesmo raciocínio utilizado para compreender as posições relativas de uma aresta com relação aos planos de projeção deve ser aplicado para as faces do objeto. Como será visto no próximo item.

## 5.2 SISTEMA DE VISTAS MONGEANAS E PLANO AUXILIAR

Tomando como exemplo uma situação na qual o cálculo da área da superfície da cobertura da casa representada na figura 5.1 é solicitado para que se possa obter o quantitativo de telhas necessárias para cobrir o telhado, percebe-se que nenhuma das vistas oferece as medidas reais da superfície da cobertura.

Na figura 5.1 é possível notar que a face ABCD (que corresponde à metade da cobertura) aparece nas quatro projeções. Porém, na vista S e nas duas laterais (LD e LE), a face ABCD aparece com suas medidas reduzidas. Isso ocorre porque o plano em que a face ABCD se apoia é oblíquo aos planos de projeção  $\pi_1$ ,  $\pi_3$  e  $\pi_4$ . Já na vista F ela aparece em VB. Dessa maneira, nenhuma das quatro vistas fornece as medidas reais da face ABCD. Para que a face ABCD fosse mostrada em VG seria necessário que ela estivesse posicionada de maneira paralela a um dos planos de projeção.

No entanto, embora a face ABCD não apareça em VG em nenhuma das projeções, algumas de suas arestas estão representadas em VG em algumas das vistas. Considerando a perpendicularidade existente entre os planos de um diedro, garantida pelo Sistema de Vistas e a noção da união das partes que estão em VG, fica possível a aplicação do método da Mudança de Plano para a extração da VG da face ABCD.

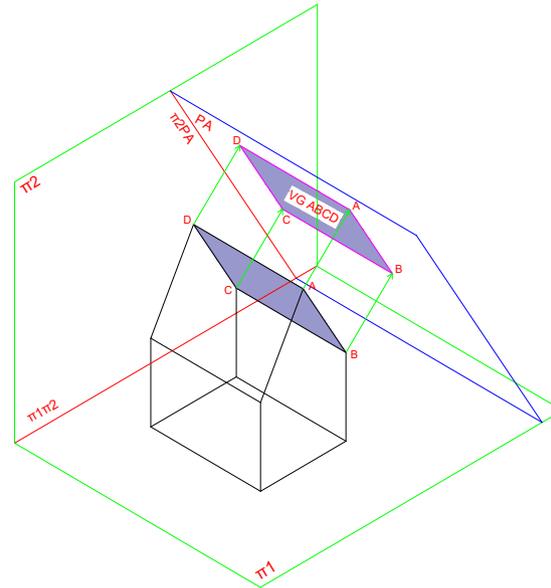
Observe que na vista F a face ABCD está representada em VB. Lembrando que a VB ocorre quando o objeto está perpendicular ao plano de projeção. Assim, se o objeto for um segmento de reta, sua representação em VB será um ponto, e se o objeto for um plano, sua representação será uma reta, como é o caso da face ABCD.

Ainda na figura 5.1, as arestas AB e DC são paralelas ao plano  $\pi_2$ , estando, portanto, em VG na vista F. Além disso, as arestas AD e BC estão paralelas tanto ao plano  $\pi_1$ , quanto aos planos  $\pi_3$  e  $\pi_4$ , conseqüentemente estão em VG nas vistas S, LD e LE, respectivamente. Dessa maneira, se as partes que representam os lados da face ABCD (as arestas AD e AB, por exemplo) forem identificadas juntamente com suas medidas é possível proceder com o cálculo do quantitativo de telhas para a cobertura, pois, como se sabe, se as medidas das arestas forem multiplicadas entre si, obtém-se a área da face ABCD. Contudo, esse raciocínio, embora útil e fácil de ser aplicado em faces com poucas arestas, como é o caso da face ABCD, ele é difícil de ser aplicado quando a face possui muitas arestas.

Para se obter a VG tanto em casos como o da face ABCD, como em casos mais complexos, utiliza-se a operação da Mudança de Plano. Com ela é possível reunir as partes da face da qual se quer a VG, cujas medidas reais estão representadas em planos de projeção diferentes em uma única projeção.

Para que se conheçam as medidas reais da cobertura é necessário, então, produzir mais uma projeção. Vale ressaltar que a condição essencial para se trabalhar no Sistema de Vistas é operar dentro de diedros. Portanto, o primeiro passo de uma operação de Mudança de Plano é a criação de um novo diedro. A razão para a criação desse novo diedro é o fato de que nenhum dos diedros já conhecidos (os que fornecem as seis vistas) colocam o plano que apoia a face da qual se quer a VG (face ABCD) na posição necessária para se obter suas VGs. Em outras palavras, é preciso criar um diedro, no qual o novo plano (Plano Auxiliar (PA)) seja paralelo à face ABCD e, ao mesmo tempo, seja perpendicular a um dos planos de projeção existentes. No caso a figura 5.2, mostra o PA perpendicular a  $\pi_2$ , posição que possibilitará o procedimento para fornecer a VG da face ABCD. Assim, uma vez criado o novo diedro, projeta-se a face ABCD ortogonalmente no PA.

Figura 5.2 - Casa representada de maneira esquemática para mostrar a projeção do telhado no plano auxiliar



Fonte: Autoras.

Como no Sistema de Vistas não se trabalha em perspectiva isométrica, mas sim em écura, tem-se, então, que trabalhar de forma bidimensional. Assim, nos próximos itens a situação mostrada na figura 5.2 será projetada no novo diedro, o  $\pi_2PA$  e o traçado da operação gráfica Mudança de Plano será mostrado em écura.

### 5.3 MUDANÇA DE PLANO

Para se extrair a VG de uma aresta ou de uma face utilizando a operação Mudança de Plano deve-se atender a duas condições:

1. Essa face ou aresta precisa ser projetada em um PA paralelo a ela;
2. O PA tem que ser inserido em VB, ou seja, de forma perpendicular a um dos seis planos de projeção.

Assim, chega-se a uma conclusão importante: para se obter a VG de um ente geométrico ele tem que estar em VB em pelo menos uma das vistas, ou em um PA.

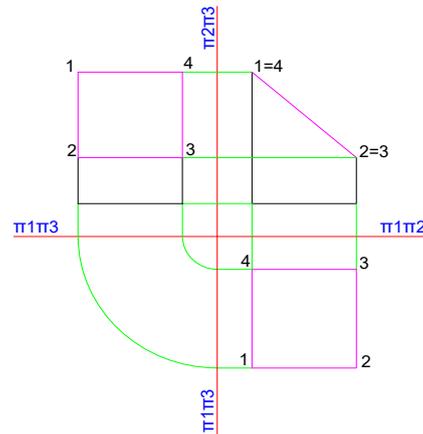
Contudo, nem sempre essa é a situação que um objeto está em relação a um plano de projeção, como discutido anteriormente no item 5.1.1. Sucintamente, é possível afirmar que existem três possíveis situações de posicionamento entre os entes geométricos e os planos de projeção. Para tornar a lógica da operação de Mudança de Plano no Sistema de Vistas mais fácil de ser compreendida, cada uma dessas situações foi chamada de Caso, assim tem-se os Casos 1, 2 e 3, os quais serão estudados em detalhes nos itens a seguir.

### 5.3.1 Caso 1

A primeira das três possíveis situações de posicionamento entre os entes geométricos e os planos de projeção na operação de Mudança de Plano se dá quando a face da qual se quer a VG já aparece em VB em pelo menos uma das seis projeções fornecidas pelo Sistema de Vistas.

A Figura 5.3 mostra um objeto com uma de suas faces em destaque, a face 1234. O objetivo é obter a VG dessa face. Para isso analisa-se as vistas dadas para identificar se em alguma delas a face 1234 aparece em VB. Tal situação ocorre na vista F, na qual a face 1234 está reduzida a um segmento de reta. Tem-se, portanto, um exemplo do Caso 1.

Figura 5.3 - Caso 1



Fonte: Autoras.

#### Resumo da análise feita na figura 5.3

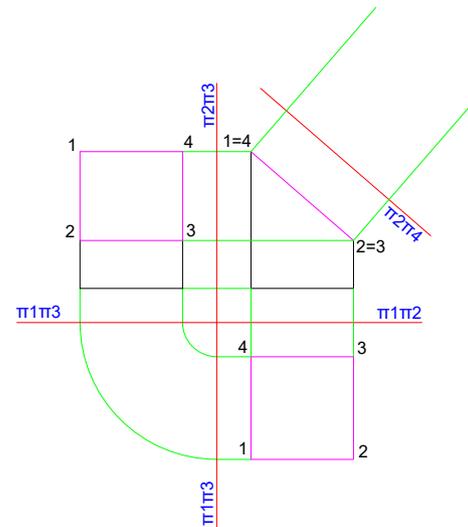
Objetivo: Identificar se a face 1234 está representada em VB em alguma das vistas:

1. Na vista S (plano  $\pi_1$ ) a face 1234 está com as arestas 12 e 43 com medidas reduzidas; já as arestas 14 e 23 estão em VG;
2. Na vista LD (plano  $\pi_3$ ) a face 1234 também está com as arestas 12 e 43 com medidas reduzidas e as arestas 14 e 23 estão em VG;
3. Na vista F (plano  $\pi_2$ ) as arestas 12 e 43 estão em VG, e as arestas 14 e 23 estão em VB (cada uma reduzida a um ponto);
4. A face 1234 está em VB na vista F, pois está reduzida a um segmento de reta.

Quando o objeto se apresenta nessa situação (Caso 1) é necessário realizar apenas um procedimento. Tal procedimento, ilustrado na figura 5.4, tem início com a criação de um novo diedro, representado pela linha de terra  $\pi_2\pi_4$ . A criação de tal diedro depende da inserção de um plano auxiliar ( $\pi_4$ ) em VB no plano  $\pi_2$  de forma que ele fique paralelo à VB da face 1234.

Em seguida, no novo diedro, os vértices da face 1234 são projetados através das linhas de chamada. Esse procedimento levará as medidas das arestas 12 e 43 que estão em VG no plano  $\pi_2$  para o plano  $\pi_4$ , como ilustra a figura 5.4.

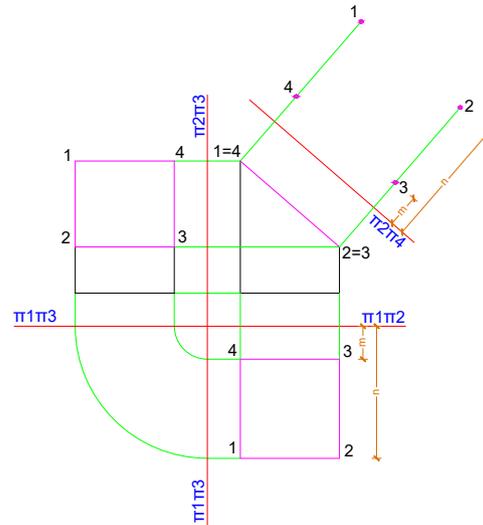
Figura 5.4 - Caso 1, procedimento para obtenção da VG da face 1234



Fonte: Autoras.

Na sequência, como mostra na figura 5.5, também por meio das linhas de chamada, ocorre o transporte das medidas das arestas 14 e 23 que estão em VG no plano  $\pi_1$ . Nesse momento é preciso ter o cuidado de tomar como referência as linhas de terra ( $\pi_1\pi_2$  e  $\pi_2\pi_4$ ), ou seja, transfere-se as medidas  $m$  e  $n$  do plano  $\pi_1$  para o plano  $\pi_4$ .

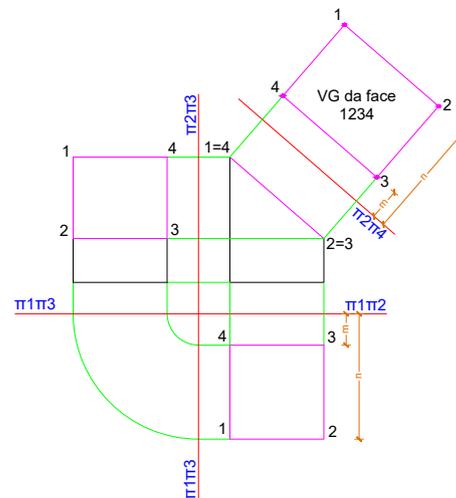
Figura 5.5 - Caso 1, procedimento para obtenção da VG da face 1234



Fonte: Autoras.

Finalmente, une-se os pontos encontrados no plano  $\pi_4$ , fechando a linha poligonal e formando a face 1234 em VG, como ilustra a Figura 5.6.

Figura 5.6 - Caso 1, procedimento para obtenção da VG da face 1234



Fonte: Autoras.

#### Resumo dos procedimentos ilustrados na figura 5.6

1. No plano  $\pi_2$ , insere-se o PA ( $\pi_4$ ), em VB, paralelo à VB da face 1234. Cria-se o diedro  $\pi_2\pi_4$ ;
2. As arestas 12 e 43 que estão em VG em  $\pi_2$  têm suas medidas projetadas em  $\pi_4$ , isso é feito através das linhas de chamada;
3. Com o compasso mede-se a distância que vai da linha de terra  $\pi_1\pi_2$  até cada um dos vértices da face 1234 (medidas m e n). Transporta-se essas medidas através das linhas de chamada até o PA ( $\pi_4$ ), tomando como referência a linhas de terra  $\pi_2\pi_4$ ;
4. Em  $\pi_4$ , une-se os vértices 1, 2, 3 e 4 fechando a linha poligonal.

#### Linhas de Chamada e transporte das medidas para o PA

Um aspecto relevante sobre as linhas de chamada é o fato de que elas são responsáveis por estabelecer a relação projetiva que existe entre os pontos do objeto e suas projeções, bem como das projeções entre si. Além disso, elas garantem a relação de ortogonalidade dentro do diedro por estarem sempre perpendiculares à LT do diedro ao qual pertencem.

Outro aspecto que merece atenção, e que é uma dúvida recorrente entre os estudantes, tem a ver como transporte de medidas para o PA na obtenção da VG de uma face (m e n na figura 5.4). Existem duas maneiras de transportar tais medidas:

1. **Observar os eixos coordenados.** Se, por exemplo, o PA foi inserido em  $\pi_2$ , significa que já se tem as larguras (x) e alturas (z), pois a vista F contém tais dimensões. Logo, quando se rebate o PA, vai ficar faltando as medidas de profundidade (y), que estão na vista S, vista na qual se buscam as medidas;
2. **Observar a relação diédrica.** Se os diedros forem “recompostos” na sua relação de ortogonalidade, ou seja, semelhante à relação em 3D, podemos observar onde as medidas que estamos buscando se projetam e, portanto, de onde devem ser extraídas. Uma forma de recompor um diedro é desenhando a épura em uma folha de papel e fazendo dobraduras nesse papel exatamente onde estão as LT.

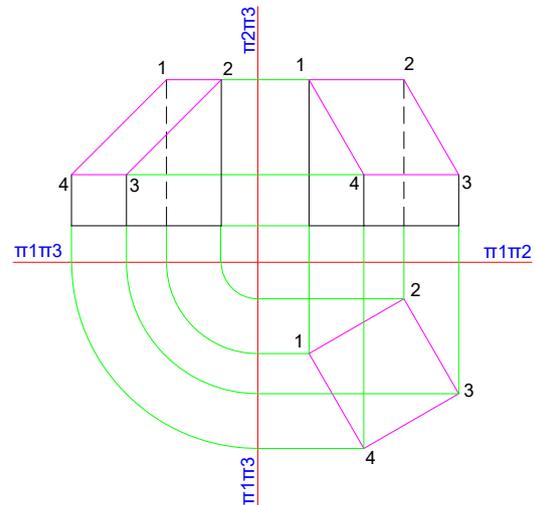
É importante lembrar que, para evitar erros, o transporte de medidas deve ser feito com o compasso e utilizando as distâncias que vão das LT até o vértice.

### 5.3.2 Caso 2

A segunda das três situações possíveis de posicionamento entre os entes geométricos e os planos de projeção na operação de Mudança de Plano fica configurada quando a face não está em VB, mas pelo menos

uma das arestas da face da qual se quer a VG está em VG em pelo menos uma das seis vistas do objeto.

Figura 5.7 - Caso 2



Fonte: Autoras

No caso em análise, mostrado na Figura 5.7, se quer obter a VG da face 1234. Percebe-se que a face 1234 não está em VB em nenhuma das vistas, conseqüentemente, descarta-se a possibilidade dessa situação ser um Caso 1. Procede-se, então, para a análise das arestas da face. Nota-se que a aresta 12 está representada em VG na vista S, pois na vista F essa aresta está paralela à LT  $\pi_1\pi_2$ . Na figura 5.7 há outras arestas em VG, porém basta existir uma aresta na posição desejada em VG para que a situação se enquadre no Caso 2.

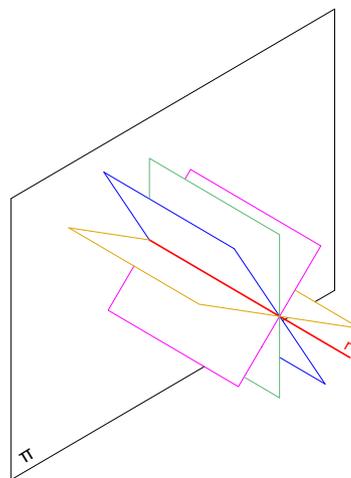
Diferente do Caso 1, as situações que se enquadram no Caso 2, necessitam de dois procedimentos para que seja possível extrair a VG da face:

1. O primeiro procedimento tem como objetivo a obtenção da VB da face 1234 (quando isso ocorrer, tem-se uma situação semelhante à do Caso 1);

2. O segundo procedimento tem como objetivo a obtenção da VG da face 1234 (esse procedimento é semelhante ao que é feito no Caso 1).

Com o propósito de obter a VB da face 1234 é necessário utilizar um PA para criar um novo diedro. Para isso utiliza-se um dos teoremas da Geometria Descritiva, ilustrado na figura 5.8, que diz que todo plano que contém a normal de outro plano é perpendicular a esse plano (MILLAR, 1887).

Figura 5.8 - Ilustração de um dos teoremas da Geometria Descritiva



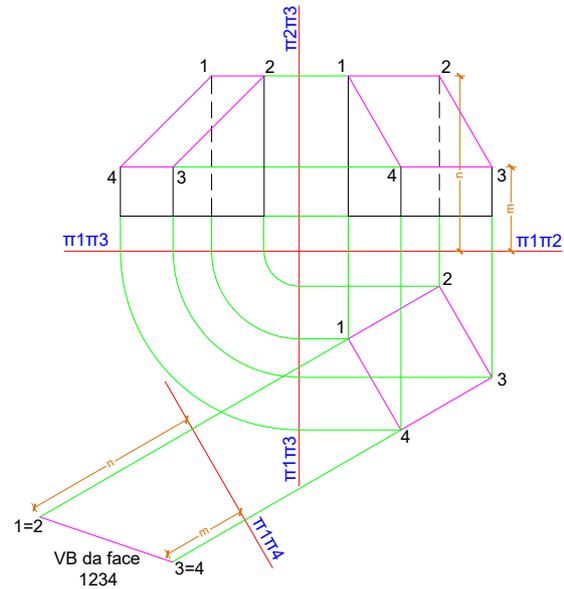
Fonte: Autoras.

Na figura 5.8 tem-se a reta  $r$ , que é “normal” ao plano  $\pi$ . O teorema diz que devido ao fato da reta  $r$  ser perpendicular ao plano  $\pi$ , qualquer plano que contiver a reta  $r$  também será perpendicular ao plano  $\pi$ .

Dando sequência à obtenção da VG da face 1234, vemos que na figura 5.9 tem-se que no plano  $\pi_2$  a aresta 12 está paralela à linha de terra  $\pi_1\pi_2$  estando, portanto, em VG plano  $\pi_1$ . Essa situação específica da aresta 12 permite que o teorema mencionado anteriormente seja utilizado. Dessa maneira, como aparece na figura 5.9, na vista S (onde a aresta 12 aparece em VG) a reta que dá suporte à aresta 12 é prolongada para que ela



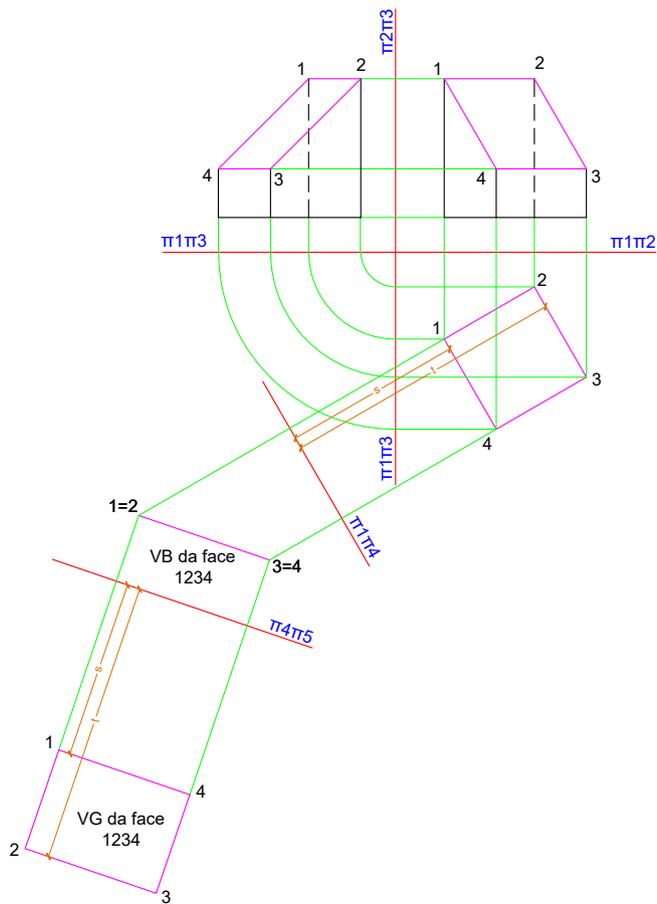
Figura 5.10 - Caso 2, primeiro procedimento  
para obtenção da VG da face 1234



Fonte: Autoras.

Com a VB da face 1234, chegamos à mesma situação do Caso 1, não sendo necessário, portanto, que se repita a explicação sobre a obtenção da VG da face. Contudo, o procedimento para a obtenção da VG está ilustrado na Figura 5.11.

Figura 5.11 - Caso 2, segundo procedimento  
para obtenção da VG da face 1234



Fonte: Autoras.

**Resumo dos procedimentos no caso 2 ilustrados nas figuras 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11**

**Procedimento 1:**

1. Verificar se a face 1234 está representada em VB em alguma das vistas dadas. No caso da peça em estudo, a face 1234 não está representada em VB em nenhuma das projeções dadas;
2. Obter a VB da face 1234, utilizando para isso um plano auxiliar ( $\pi_4$ ) em um novo diedro ( $\pi_1\pi_4$ ). Para que a face 1234 fique em VB em um PA, o mesmo precisa estar perpendicular à face 1234. É preciso, então, trabalhar com uma aresta pertencente à face 1234 que esteja em VG. Na vista F é possível verificar que as arestas 12 e 43 estão paralelas à LT  $\pi_1\pi_2$ , consequentemente, estão paralelas ao plano  $\pi_1$ . Assim, conclui-se que tais arestas estão em VG na vista S. Dessa maneira, se o PA estiver perpendicular a qualquer aresta pertencente à face 1234, que esteja em VG, a nova projeção irá reduzir essa aresta à sua VB (que é um ponto). Como consequência, a nova projeção irá reduzir toda a face 1234 à sua VB (que é um segmento de reta). Desse modo, para que a face 1234 esteja em VB no PA, este precisa estar perpendicular à VG de uma aresta dessa face. Com o objetivo de obter a VB da face 1234 deve-se, então, iniciar esse processo inserindo o primeiro PA ( $\pi_4$ ) perpendicular ao prolongamento da reta que dá suporte à aresta 12;
3. Em seguida, projeta-se a face 1234 no novo diedro ( $\pi_1\pi_4$ ). O resultado será a VB da face 1234, o que encerra o primeiro procedimento;

**Procedimento 2:**

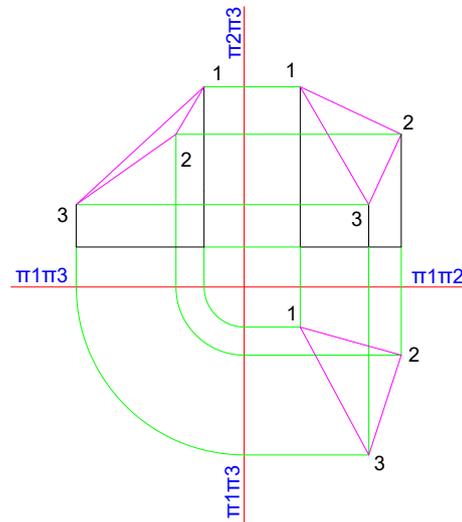
4. Para o segundo procedimento (semelhante ao Caso 1) cria-se mais um diedro ( $\pi_4\pi_5$ ) através da inserção de um segundo PA ( $\pi_5$ ) em VB com relação a  $\pi_4$  e paralelo à VB da face 1234;
5. Na sequência, projeta-se a face 1234 em  $\pi_5$ , cujo resultado é a sua VG. Para isso é necessário levar as linhas de chamada para o novo diedro e nelas marcar (em  $\pi_5$ ) as medidas transportadas, com o compasso, a partir da LT  $\pi_1\pi_4$  (medidas s e t da figura 5.11). Nesse transporte, a referência dos eixos coordenados é perdida, a solução é, então, utilizar a relação diédrica explicada anteriormente;
6. Após o transporte das medidas, tem-se quatro pontos (1, 2, 3 e 4), que quando unidos por uma linha poligonal se tornam os vértices da VG da face 1234.

**5.3.3 Caso 3**

Na terceira, e última, possível situação de posicionamento entre os entes geométricos e os planos de projeção na operação de Mudança de Plano, a face da qual se quer a VG, face 123, não está em VB em nenhuma das vistas. Além

disso, nenhuma de suas arestas aparece representada em VG em nenhuma das vistas, como mostra o exemplo da Figura 5.12. Tem-se, então, o Caso 3.

Figura 5.12 - Caso 3



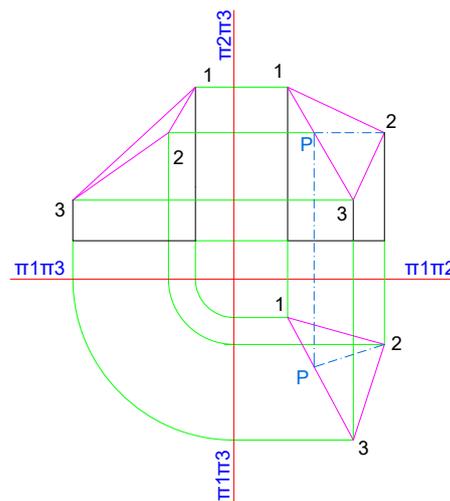
Fonte: Autoras.

O teorema apresentado no item anterior também é utilizado para obter a VG dessa face. Entretanto, é preciso realizar um procedimento antes de utilizá-lo. O objetivo do procedimento é chegar à mesma situação que caracteriza o Caso 2, ou seja, ter uma das retas da face 123 em VG em uma das vistas dadas. Portanto, para que a VG da face 123 seja obtida serão necessários três procedimentos.

O primeiro procedimento consiste em destacar um dos infinitos segmentos de reta pertencentes à face 123. Porém, não é qualquer segmento, ele tem que estar em VG em pelo menos uma das vistas da peça. Para conseguir identificá-lo é necessário que ele esteja paralelo a um dos planos de projeção, ou seja, em uma das vistas, esse segmento vai aparecer paralelo a uma das LT e, por consequência, em outra vista ele vai aparecer em VG.

No caso em estudo, ilustrado na Figura 5.13, destaca-se o segmento 2P. Na vista F, tal segmento está paralelo à LT  $\pi_1\pi_2$ , logo 2P está paralelo ao plano  $\pi_1$ , e, portanto, em VG em  $\pi_1$ . Ao se obter 2P em VG (em  $\pi_1$ ), volta-se a mesma situação do Caso 2.

Figura 5.13 - Caso 3, primeiro procedimento



Fonte: Autoras.

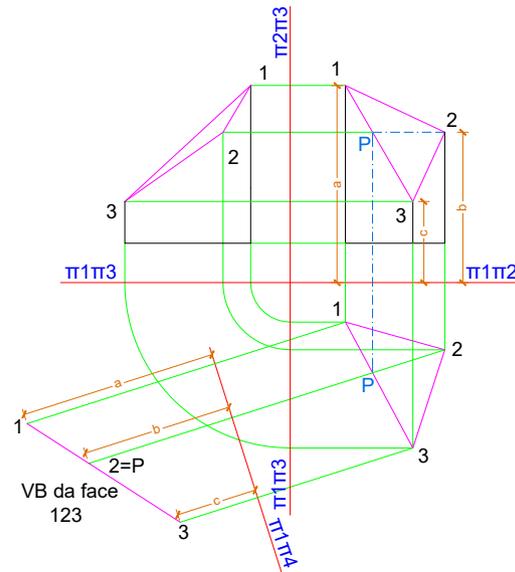
**Resumo dos procedimentos ilustrados na figura 5.13**

**Procedimento 1:** encontrar a VG de uma aresta

1. É preciso projetar a VB da face 123 para extrair sua VG. Para isso precisa-se de uma aresta em VG em uma das vistas. A peça em estudo não possui essa aresta em VG. É preciso, então, criá-la. Escolhe-se qualquer uma das vistas para trabalhar e a partir de um dos vértices da face da qual se quer a VG, no caso da peça da figura, o vértice escolhido foi o 2.
2. Traça-se o segmento de reta 2P que é paralelo a  $\pi_1$ ;
3. Se P pertence à aresta 13, ele irá, conseqüentemente, pertencer a todas as projeções da aresta 13. Sendo assim, com o uso de uma linha de chamada, encontra-se P em  $\pi_1$ , e, assim, tem-se o segmento de reta 2P em VG, chegando a uma situação semelhante ao Caso 2 (**Procedimento 2**, figura 5.10 e explicação no quadro anterior em destaque).

Em seguida é realizado o segundo procedimento do Caso 3, ilustrado na figura 5.14, que consiste na inserção do PA ( $\pi_4$ ) para criação de um novo diedro ( $\pi_1\pi_4$ ), justamente como ocorreu no Caso 2 (figuras 5.9 e 5.10). Assim como aconteceu na Figura 5.9, o PA ( $\pi_4$ ) é inserido de maneira perpendicular à reta que dá suporte ao segmento 12 na vista em que ele está em VG. No caso da Figura 5.14, o segmento de reta cuja reta suporte é prolongada é o 2P. Depois que a face 123 é projetada no diedro  $\pi_1\pi_4$ , tem-se sua VB. Desse modo, chega-se a uma situação semelhante ao Caso 1, onde a face da qual se quer obter a VG está em VB.

Figura 5.14 - Caso 3, segundo procedimento Caso 3



Fonte: Autoras.

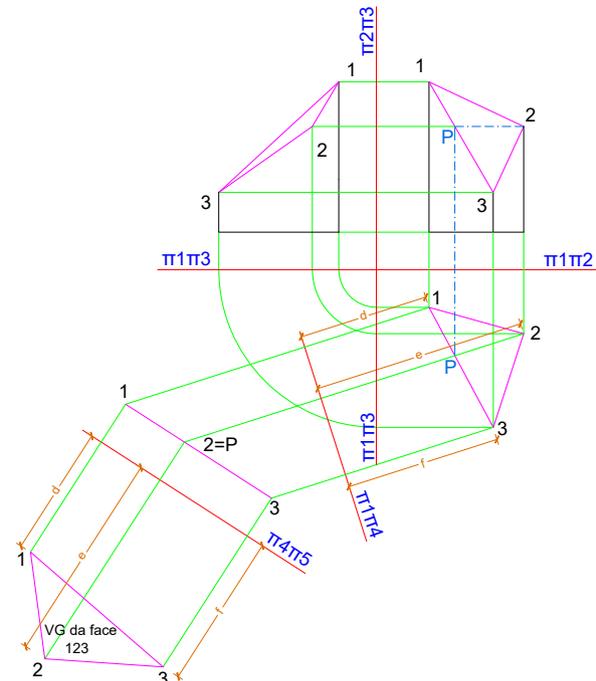
Por último é realizado o terceiro procedimento para extrair a VG da face 123 o qual está ilustrado na figura 5.15. Tal procedimento consiste na inserção de um segundo PA ( $\pi_5$ ) na écura. Essa inserção é feita de modo que a nova linha de terra ( $\pi_4\pi_5$ ) fique paralela à projeção da face 123 em  $\pi_4$ . Como resultado tem-se um novo diedro, o  $\pi_4\pi_5$ . O registro completo da operação gráfica de extração da VG da face 123 está na figura 5.15.

**Resumo dos procedimentos ilustrados na figura 5.15**

1. **Procedimento 3:** determinar a VB da face 123

1. A face 123 está em VB em  $\pi_4$ . Cria-se, então, um novo diedro ( $\pi_4\pi_5$ ) com a inserção de mais um PA, o plano  $\pi_5$ . Tal plano é inserido em VB com relação a  $\pi_4$  e paralelo à VB da face 123;
2. Projeta-se os vértices da face 123 em  $\pi_5$  através do uso das linhas de chamada;
3. Transporta-se (com o compasso) as medidas “d”, “e” e “f”, que correspondem à distância de cada um dos vértices da face 123 até o plano  $\pi_4$ . Atenção! No momento do transporte é preciso tomar como referência as LTs. Nesse transporte se perde a referência dos eixos coordenados, então, sugere-se utilizar a relação diédrica explicada anteriormente;
4. Une-se os vértices 1, 2 e 3 com uma linha poligonal para se obter a VG da face.
5. **Observação:** quando a face possui muitos vértices, ou quando ela não é simétrica tomar como referência as projeções da face da qual se quer obter a VG nas outras vistas.

**Figura 5.15 - Caso 3, terceiro procedimento Caso 3**



Fonte: Autoras.

# 6

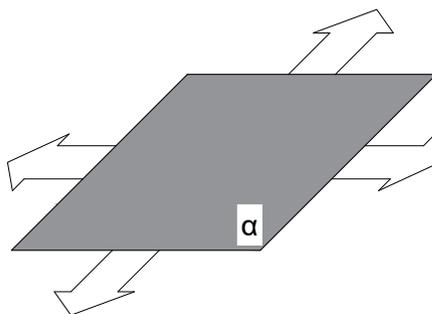
SEÇÃO  
PLANA

## 6.1 INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS DE SEÇÃO PLANA E DE INTERSEÇÃO

### 6.1.1 Superfície e sólido

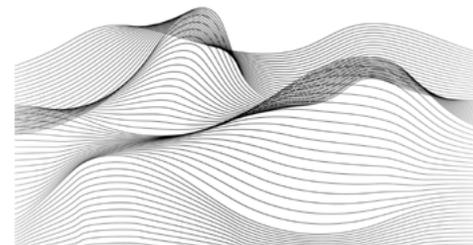
Na Geometria Gráfica existem diversas classificações para as superfícies. Nesse capítulo o objetivo é trabalhar a seção plana de superfícies e sólidos geométricos, portanto, a classificação adotada será a que considera dois tipos gerais e mais abrangentes de superfícies. Esses dois grupos são as superfícies geométricas e as superfícies não geométricas. As superfícies geométricas podem ser definidas matematicamente e podem ser geradas por uma linha que se move segundo uma lei dada (ver figura 6.1). As superfícies não geométricas, a de um terreno, por exemplo, “são substituídas, nas aplicações, por superfícies convencionais, chamadas topográficas, que se aproximam delas o mais possível”, ver figura 6.2 (CHAPUT, 1966, p. 193).

Figura 6.1- Superfície geométrica



Fonte: Autoras.

Figura 6.2- Superfície não geométrica



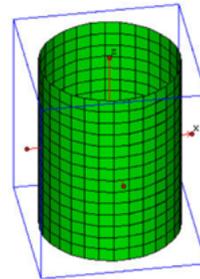
Fonte: Freepik, 2022.<sup>1</sup>

As figuras 6.3, 6.4 e 6.5 trazem diferentes exemplos de superfícies-geométricas: cilíndrica, cônica e esférica, respectivamente. O que elas têm em comum é o fato de possuírem leis de geração. Isso quer dizer que cada

<sup>1</sup> Disponível em: [https://br.freepik.com/vetores-gratis/vetor-de-padrao-de-onda-dinamica-de-visualizacao-de-dados\\_3585494.htm](https://br.freepik.com/vetores-gratis/vetor-de-padrao-de-onda-dinamica-de-visualizacao-de-dados_3585494.htm). Acesso em: 29 set. 2022.

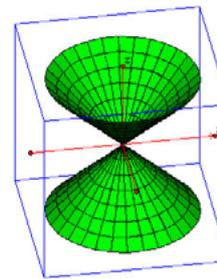
uma delas “pode ser gerada por uma linha que se move segundo uma lei dada” (CHAPUT, 1966, p. 193).

**Figura 6.3 -  
Superfície cilíndrica**



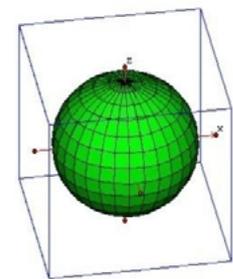
Fonte: Bortolossi, 2022<sup>2</sup>

**Figura 6.4 -  
Superfície cônica**



Fonte: Bortolossi, 2022<sup>3</sup>

**Figura 6.5 -  
Superfície esférica**



Fonte: Bortolossi, 2022<sup>4</sup>

Uma superfície pode ser gerada por mais de uma lei de geração. No caso da superfície cilíndrica (figura 6.3), por exemplo, uma de suas leis de geração é a seguinte: uma superfície cilíndrica pode ser obtida quando um segmento de reta, paralelo a um eixo localizado no centro de uma circunferência, gira em torno desse eixo sobre essa circunferência. Outra lei de geração para a mesma superfície da figura 6.3 é a seguinte: se uma circunferência se move ao longo de um eixo, o qual passa pelo seu centro de modo perpendicular ao plano que a contém, tem-se uma superfície cilíndrica.

Outra forma de categorizar as superfícies é chamando-as de superfícies fechadas e abertas. A superfície da figura 6.4 além de ser um exemplo de superfície cônica, também é um exemplo de superfície aberta. Já a superfície da figura 6.5 traz um exemplo de superfície fechada, a superfície esférica. Ao contrário das superfícies abertas, as superfícies fechadas admitem interior e exterior. O espaço interior à superfície

2 Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2007.1/qs/cylinder-img.jpg>. Acesso em: 27 set. 2022.

3 Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2007.1/qs/double-cone-img.jpg>. Acesso em: 27 set. 2022.

4 Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2007.1/qs/sphere-img.jpg>. Acesso em: 27 set. 2022.

é o seu volume, já todo o restante é considerado espaço exterior. A soma da superfície com o espaço interior chama-se **sólido** (RANGEL, 1976, p. 3). Por exemplo, a esfera da figura 1.10 é um sólido composto pela superfície esférica somada a toda região compreendida por essa superfície.

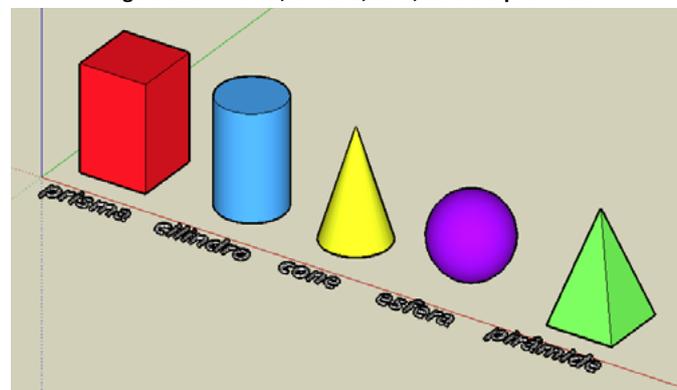
Figura 1.10 - Esfera



Fonte: bravebug- Openclipart, 2022<sup>5</sup>.

Sólidos geométricos são objetos tridimensionais que podem ser classificados em três grupos: poliedros, corpos redondos e outros (SILVA, c2022). A figura 6.6 traz alguns exemplos de sólidos geométricos: pirâmide, prisma, cilindro, cone e esfera, que serão trabalhados neste capítulo.

Figura 6.6 - Prisma, cilindro, cone, esfera e pirâmide



Fonte: Autoras.

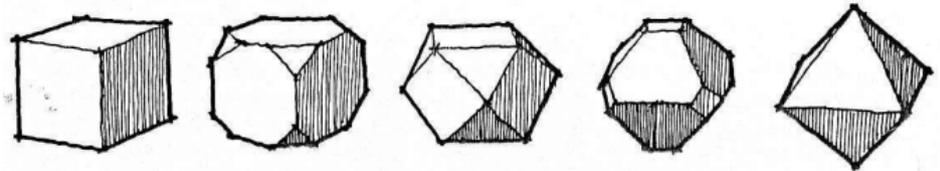
sumário

5 Disponível em: <https://publicdomainvectors.org/en/free-clipart/Metal-sphere/49462.html>. Acesso em: 27 set. 2022.

Os poliedros são figuras tridimensionais que possuem faces, arestas e vértices, sendo formados pela união de polígonos planos. A figura 6.7 ilustra alguns poliedros. Segundo Sá em sua obra *Edros* (1982):

Diz-se poliedro todo sólido limitado por polígonos planos. Os polígonos são colocados lado a lado, não coplanares, definindo um trecho fechado do espaço. Os polígonos são chamados faces do poliedro. Os lados dos polígonos são chamados arestas do poliedro. O ângulo entre duas faces é chamado ângulo diedro. Os vértices dos polígonos coincidem com os vértices do poliedro. As arestas que saem de um mesmo vértice formam um ângulo sólido do poliedro (SÁ, 1982, p.42).

Figura 6.7 - Exemplos de poliedros



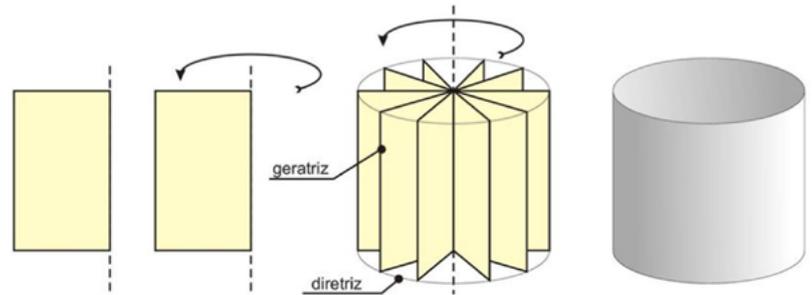
Fonte: Sá (1982).

Os corpos redondos são sólidos geométricos que possuem superfícies curvas e que, se colocados sobre uma superfície plana levemente inclinada, rolam. (SILVA, c2022). Sá afirma que os sólidos de revolução são um caso particular de corpos redondos (SÁ, 1982). Segundo Chaput,

Sólido de revolução é o corpo gerado por uma superfície plana girando em torno de um eixo que está situado no mesmo plano, e que não corta a figura geratriz. Superfície de revolução é a superfície gerada por uma linha girando ao redor de um eixo. A figura que gira chama-se figura geratriz; cada um dos seus pontos descreve uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo e cujo centro está sobre o eixo. Os mais importantes sólidos de revolução são: o cilindro, o cone e a esfera; são os três corpos redondos (CHAPUT, 1954, p. 326).

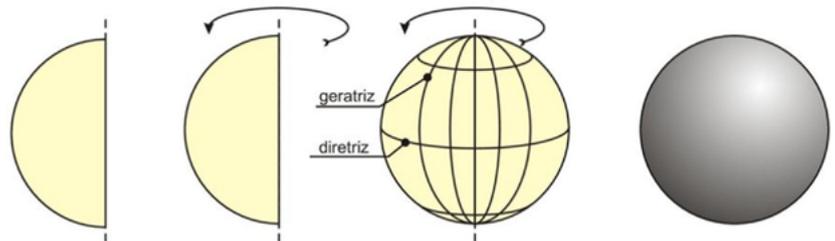
Dessa maneira, se um retângulo girar em torno de um eixo tem-se um cilindro, como mostra a figura 6.8; ou se uma meia circunferência girar em torno de um eixo tem-se uma esfera como a da figura 6.9.

Figura 6.8 - Sólido de revolução - cilindro



Fonte: Docplayer, c2022<sup>6</sup>.

Figura 6.9 - Sólido de revolução - esfera



Fonte: Docplayer, c2022<sup>7</sup>.

### 6.1.2. Interseção e seção

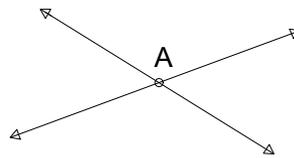
A Geometria entende o conceito de interseção da mesma maneira que a Matemática, isto é, interseção é uma operação por meio da qual se obtém o conjunto formado pelos elementos comuns a dois outros conjuntos (MICHAELIS, 2022, on-line).

6 Disponível em: [https://docplayer.com.br/docs-images/40/8088789/images/page\\_4.jpg](https://docplayer.com.br/docs-images/40/8088789/images/page_4.jpg). Acesso em: 27 set. 2022.

7 Disponível em: [https://docplayer.com.br/docs-images/40/8088789/images/page\\_4.jpg](https://docplayer.com.br/docs-images/40/8088789/images/page_4.jpg). Acesso em: 27 set. 2022.

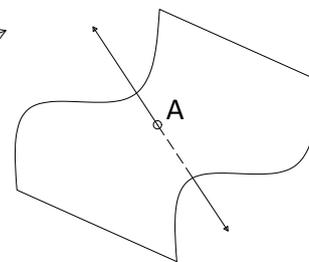
Na Geometria Gráfica existem várias possibilidades de interseção. A figura 6.10 ilustra a interseção entre duas retas, marcada por um ponto que é comum a elas. Quando se tem uma reta e uma superfície a interseção tanto pode ser marcada por um ponto (figura 6.11) como por múltiplos pontos (figura 6.12).

Figura 6.10 - Interseção entre duas retas



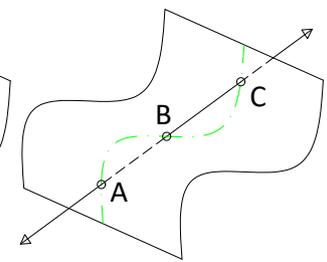
Fonte: Autoras.

Figura 6.11 - Interseção entre superfície e reta



Fonte: Autoras.

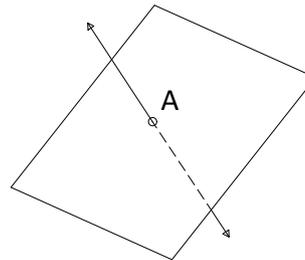
Figura 6.12 - Interseção entre superfície e reta (múltiplos pontos)



Fonte: Autoras.

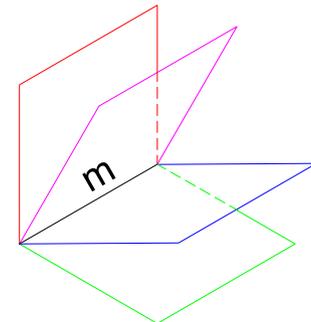
A figura 6.13 ilustra a interseção entre um plano e uma reta, não pertencente a este, cujo resultado é o ponto A. Já a figura 6.14 mostra a reta "m" que é o resultado da interseção entre planos.

Figura 6.13 - Interseção entre reta e plano



Fonte: Autoras.

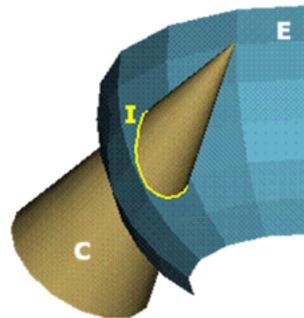
Figura 6.14 - Interseção entre planos



Fonte: Autoras.

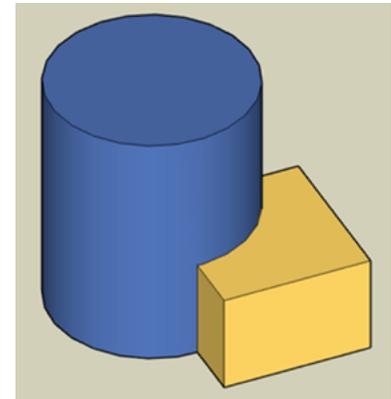
As figuras acima ilustram alguns exemplos de interseção, porém não foram esgotadas todas as possibilidades, podem existir interseções entre quaisquer entes geométricos, como por exemplo, entre superfícies ou entre sólidos ou, ainda, entre superfícies e sólidos, como aparece nas figuras 6.15 e 6.16. A figura 6.15, que traz a interseção (I) que ocorre entre a porção de uma superfície esférica (E) e um tronco de cone (C). A figura 6.16 mostra a interseção entre sólidos.

Figura 6.15 - Interseção entre superfícies e sólidos



Fonte: Barison, 2022.<sup>8</sup>

Figura 6.16 - Interseção entre sólidos



Fonte: Autoras.

A definição do termo “seção” para a área da Geometria também pode ser encontrada nos dicionários:

Seção: 1 Ato ou efeito de seccionar. 2 Lugar onde uma coisa está cortada. 3 Cada uma das partes em que um todo foi seccionado ou separado; segmento. [...] 6 Desenho da figura que resultaria do corte de qualquer coisa por um plano, geralmente vertical. [...] 8 **Geom Figura proveniente da interseção de um sólido ou superfície por um plano.**[...] (MICHAELIS, 2022, on-line, grifos das autoras).

8 Disponível em: [http://www.mat.uel.br/geometrica/php/img/gif/gd/gd\\_18t/1.gif](http://www.mat.uel.br/geometrica/php/img/gif/gd/gd_18t/1.gif). Acesso em: 29 set. 2022.

O conceito de seção está incluso no conceito de interseção porque para realizar o estudo da seção entre um plano de seção e um objeto, por exemplo, tem-se que determinar pontos e arestas em comum entre ambos, ou seja, é necessário determinar as interseções entre o plano de seção e os elementos do objeto que está sendo seccionado. Dessa forma, podemos afirmar que toda seção é uma interseção.

## 6.2. SEÇÃO PLANA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Uma seção plana ocorre quando uma superfície, ou um sólido, é seccionado por um plano, também chamado de plano setor. O resultado da seção plana de uma superfície é a linha de interseção entre o plano e esta superfície. Já no caso da seção plana de um sólido, a seção resultante será uma figura plana, que compreende toda a região de interseção entre o plano e o sólido.

As possibilidades de posição de um plano de seção são infinitas. Não seria possível, portanto, apresentar todas elas nesse livro. Sendo assim, foram feitas duas opções didáticas para que esse conteúdo fosse explorado. A primeira foi a de fornecer o plano de seção sempre em Vista Básica (VB) em uma das vistas, posição que corresponde ao primeiro caso de verdadeira grandeza (Capítulo 5). Já a segunda consistiu em apresentar as posições do plano de seção que ilustram a maior parte das situações encontradas na atividade profissional de engenheiros, arquitetos, designers e licenciados em expressão gráfica.

Para facilitar a comunicação, nesse capítulo utilizaremos o plano  $\pi_1$  (também chamado de plano horizontal, ou ainda de plano do chão) como referência para determinar a posição do plano setor.

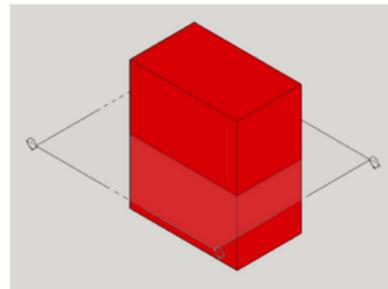
### 6.2.1 Seção plana de prismas

Um prisma reto de base retangular será usado para exemplificar seções planas em prismas, as quais serão estudadas em três situações, que são:

1. Plano de seção paralelo ao plano  $\pi_1$ ;
2. Plano de seção oblíquo ao plano  $\pi_1$ ;
3. Plano de seção perpendicular ao plano  $\pi_1$ .

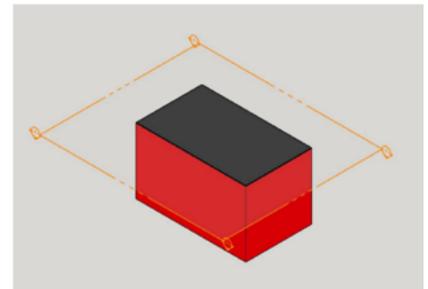
1. Plano de seção paralelo ao plano  $\pi_1$ : no caso do prisma de base retangular da figura 6.17, a seção produzida pelo  $\alpha$  é um polígono igual ao polígono da base, como mostra a figura 6.18.

Figura 6.17 - Prisma seccionado por um plano paralelo ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

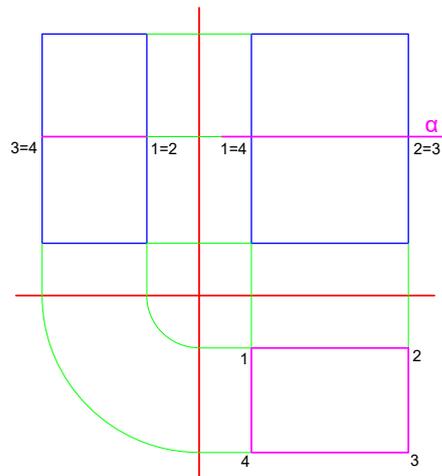
Figura 6.18 - Prisma truncado após a seção



Fonte: Autoras.

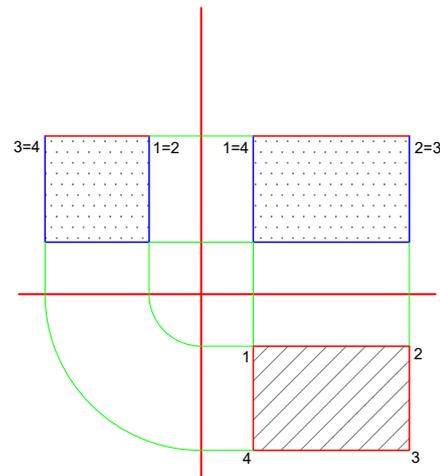
A figura 6.19 mostra a representação em vistas da seção de um prisma de base retangular por um plano paralelo ao plano  $\pi_1$ . O plano de seção  $\alpha$  está em VB nas vistas F e LD, onde a área seccionada está reduzida a um segmento de reta. Já na vista S a área seccionada é uma região semelhante à da base do prisma. A figura 6.20 mostra o resultado da seção em estudo, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

Figura 6.19 - Vistas de um prisma a ser seccionado por um plano paralelo ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

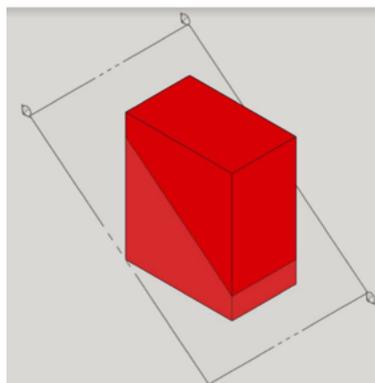
Figura 6.20 - Vistas da peça resultante da seção



Fonte: Autoras.

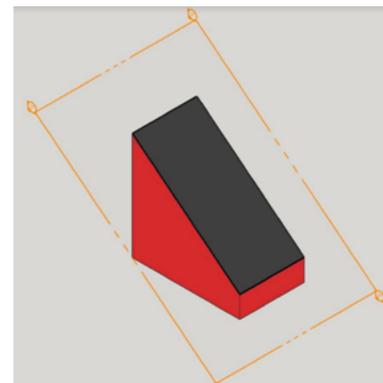
2. Plano de seção oblíquo ao plano  $\pi_1$ : no caso da figura 6.21, a seção produzida pelo plano de seção  $\alpha$  é um polígono diferente do polígono da base, conforme mostra a figura 6.22.

Figura 6.21 - Prisma seccionado por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

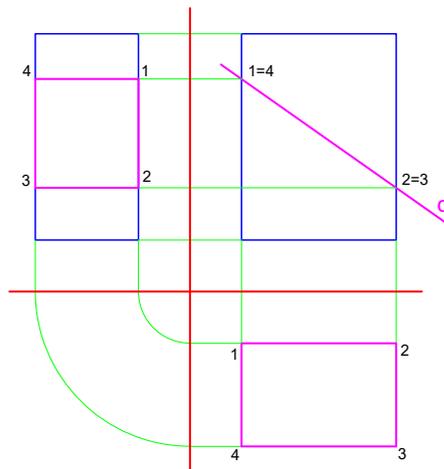
Figura 6.22 - Prisma truncado após a seção



Fonte: Autoras.

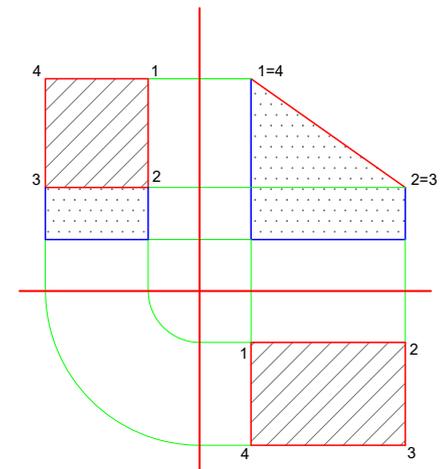
A figura 6.23 mostra como fica a representação em vistas da seção de um prisma de base retangular pelo plano de seção  $\alpha$ , oblíquo ao plano  $\pi_1$ . O plano  $\alpha$  está em VB na vista F, já nas vistas S e LD as áreas seccionadas são regiões quadrangulares com dimensões diferentes das dimensões da base e do topo do prisma. A figura 6.24 traz o resultado da seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

Figura 6.23 - Vistas de um prisma seccionado por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

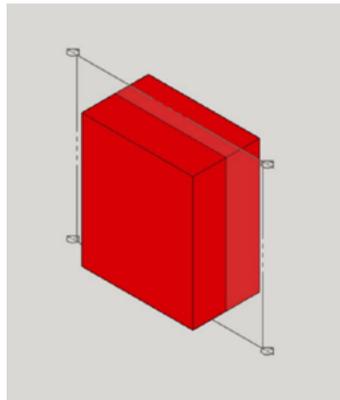
Figura 6.24 - Vistas da peça resultante da seção



Fonte: Autoras.

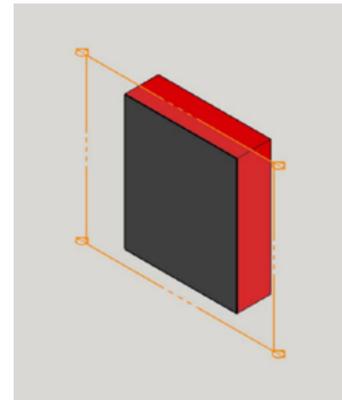
3. Plano de seção perpendicular ao plano  $\pi_1$ : no exemplo da figura 6.25 o plano de seção  $\alpha$  está perpendicular ao plano  $\pi_1$  e, nesse caso específico, está paralelo à face F do prisma. Nesse caso, a seção produzida é um polígono igual à face F, conforme mostra a figura 6.26.

Figura 6.25 - Prisma seccionado por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

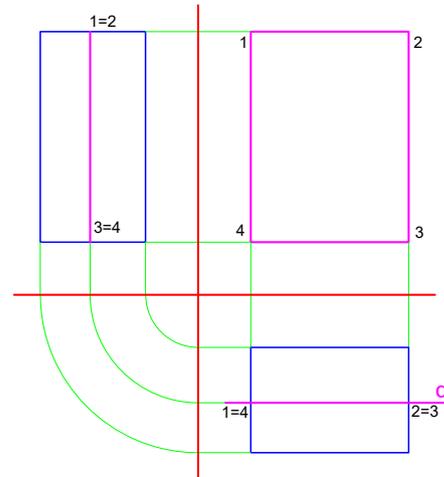
Figura 6.26 - Prisma truncado após a seção



Fonte: Autoras.

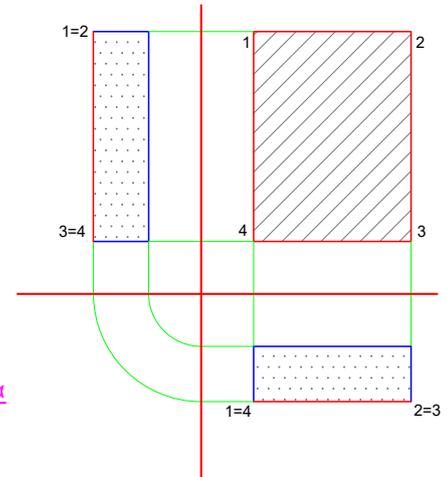
A figura 6.27 mostra a representação em vistas da seção de um prisma de base retangular por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$ , o plano de seção  $\alpha$  está em VB nas vistas S e LD. Já na vista F, a área seccionada é um polígono semelhante à face F do prisma, uma vez que o plano está paralelo a essa face. A figura 6.28, por sua vez, mostra o resultado dessa seção com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

Figura 6.27 - Vistas de um prisma seccionado por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

Figura 6.28 - Vistas da peça resultante da seção



Fonte: Autoras.

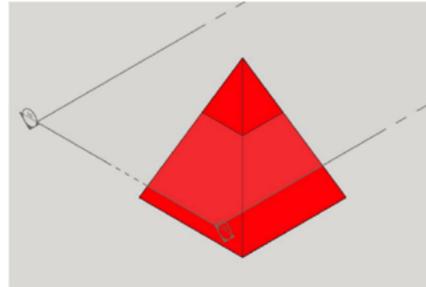
## 6.2.2 Seção plana de pirâmides

Uma pirâmide reta de base quadrangular será usada como exemplo para trabalhar com a seção de pirâmides. Serão estudadas quatro posições básicas para o plano de seção, são elas:

1. Plano de seção paralelo ao plano  $\pi_1$ ;
2. Plano de seção oblíquo ao plano  $\pi_1$ ;
3. Plano de seção perpendicular ao plano  $\pi_1$ ;
4. Plano de seção perpendicular ao plano  $\pi_1$  passando pelo vértice da pirâmide.

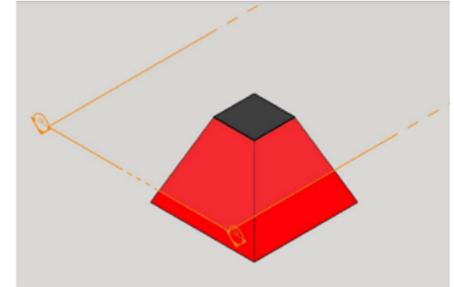
1. Plano de seção paralelo ao plano  $\pi_1$ : no caso da pirâmide de base quadrangular da figura 6.29, a seção produzida é um polígono semelhante ao polígono da base, como mostra a figura 6.30. Nas pirâmides, a seção resultante de um plano de seção paralelo ao chão é diferente da do prisma porque nas pirâmides as faces laterais convergem no vértice.

**Figura 6.29 - Pirâmide seccionada por um plano paralelo ao plano  $\pi_1$**



Fonte: Autoras.

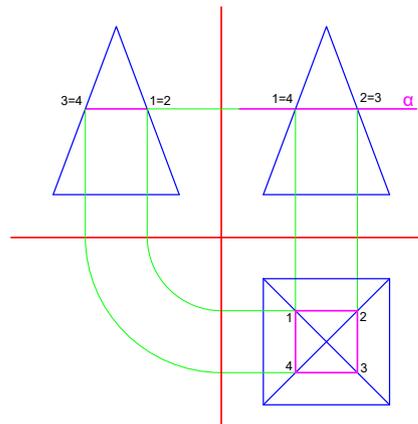
**Figura 6.30 - Pirâmide truncada após a seção**



Fonte: Autoras.

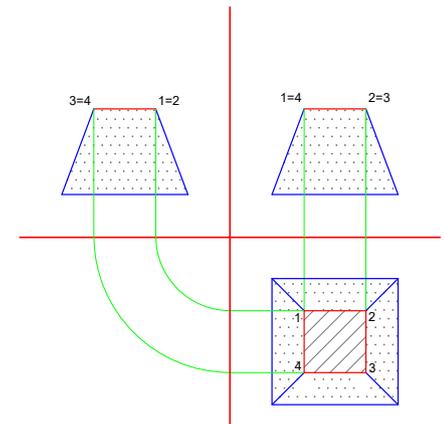
A figura 6.31 mostra como fica a representação, em vistas, da seção de uma pirâmide de base quadrangular por um plano paralelo ao plano  $\pi_1$ . O plano de seção  $\alpha$  está em VB na vista F e o mesmo ocorre na vista LD. Já na vista S, a área seccionada é uma região semelhante, porém menor, que a da base da pirâmide. A figura 6.32 ilustra o resultado dessa seção com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

Figura 6.31 -Vistas de uma pirâmide seccionada por um plano paralelo ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

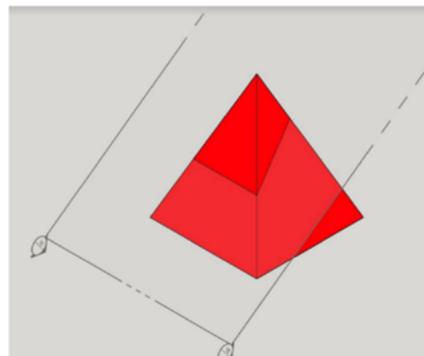
Figura 6.32 - Vistas da peça resultante da seção



Fonte: Autoras.

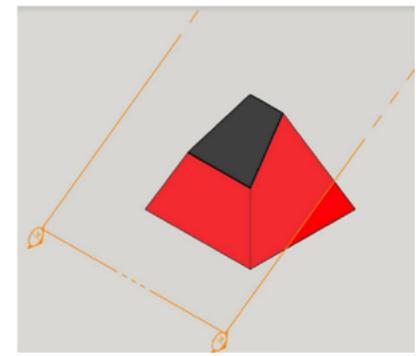
2. Plano de seção oblíquo ao plano  $\pi_1$ : no caso da figura 6.33, a seção produzida é um polígono diferente do polígono da base, conforme mostra a figura 6.34.

Figura 6.33 - Pirâmide seccionada por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

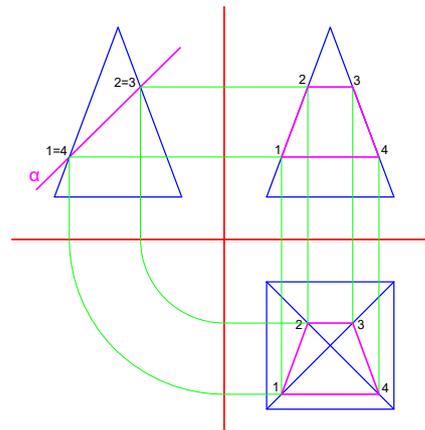
Figura 6.34 - Pirâmide truncada após a seção



Fonte: Autoras.

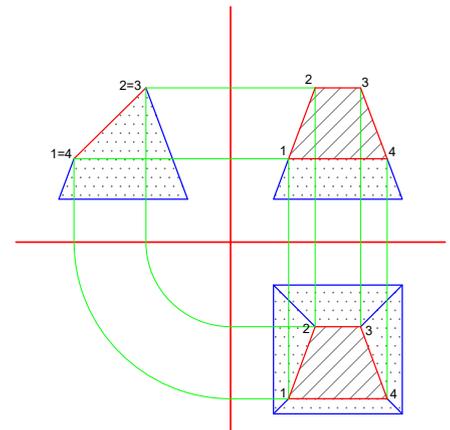
A figura 6.35 mostra a representação, em vistas, da seção de um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$  em uma pirâmide de base quadrangular. O plano de seção  $\alpha$  está em VB na vista LD. Nas vistas F e S as áreas seccionadas são regiões quadrangulares de dimensões diferentes das da base. É possível observar que a base é um quadrado e as seções das vistas F e S são trapézios, isso ocorre por conta da obliquidade do plano de seção  $\alpha$  em relação ao plano  $\pi_1$ . A figura 6.36 mostra o resultado dessa seção com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

**Figura 6.35 - Vistas de uma pirâmide seccionada por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$**



Fonte: Autoras.

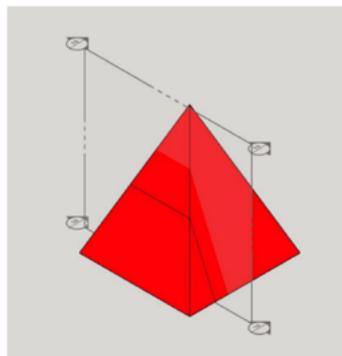
**Figura 6.36 - Vistas da peça resultante da seção**



Fonte: Autoras.

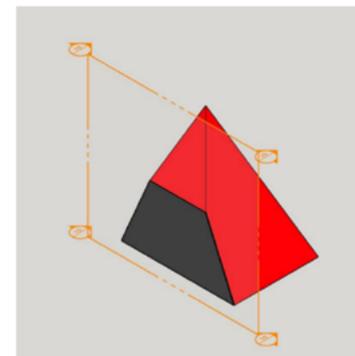
3. Plano de seção perpendicular ao plano  $\pi_1$ : A figura 6.37 mostra uma pirâmide sendo seccionada por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$ . A seção produzida é um polígono diferente do polígono da face F, conforme mostra a figura 6.38.

**Figura 6.37 - Pirâmide seccionada por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$**



Fonte: Autoras.

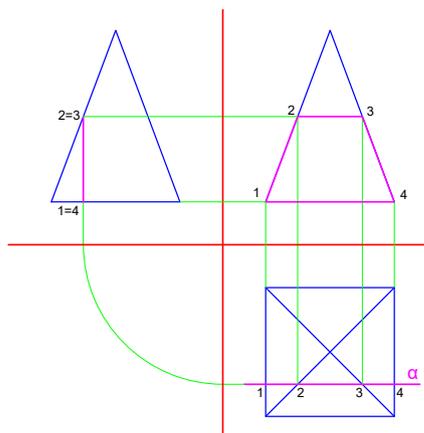
**Figura 6.38 - Pirâmide truncada após a seção**



Fonte: Autoras.

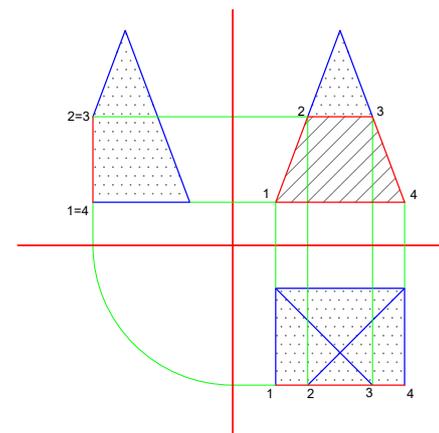
A figura 6.39 mostra como fica a representação, em vistas, da seção de um plano perpendicular ao  $\pi_1$  em uma pirâmide de base quadrangular. O plano de seção  $\alpha$  está em VB nas vistas S e LD, reduzido, portanto, a um segmento de reta. Já na vista F a área seccionada tem a forma de um trapézio. A figura 6.40 mostra o resultado dessa seção com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

**Figura 6.39 - Vistas de uma pirâmide seccionada por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$**



Fonte: Autoras.

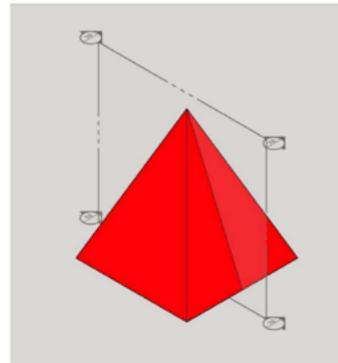
**Figura 6.40 - Vistas da peça resultante da seção**



Fonte: Autoras.

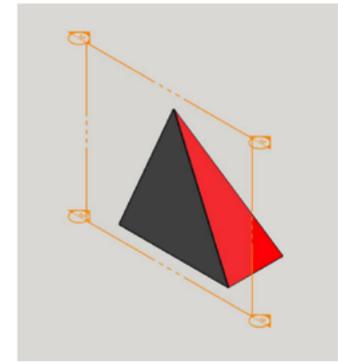
4. Plano de seção perpendicular ao plano  $\pi_1$  passando pelo vértice da pirâmide: a figura 6.41 mostra uma pirâmide seccionada por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$  passando pelo seu vértice, já a figura 6.42 mostra que a seção produzida é um triângulo semelhante à face F.

**Figura 6.41 - Pirâmide seccionada por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$  que passa pelo vértice**



Fonte: Autoras.

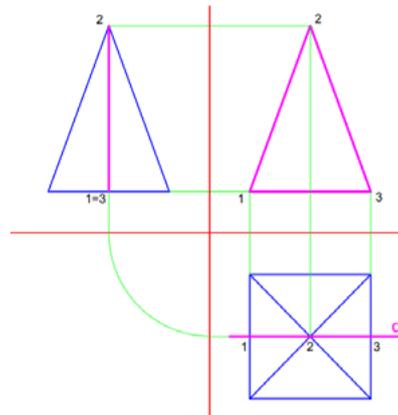
**Figura 6.42 - Pirâmide truncada após a seção**



Fonte: Autoras.

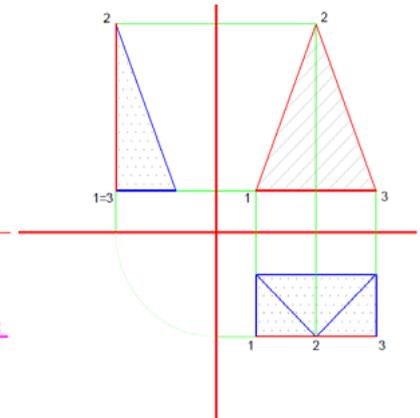
A figura 6.43 mostra a representação em vistas da seção de um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$  que passa pelo vértice de uma pirâmide de base quadrangular. O plano de seção  $\alpha$  está em VB nas vistas S e LD, estando, portanto, reduzido a um segmento de reta. Já na vista F, a área seccionada é um triângulo semelhante ao da face F. A figura 6.44 mostra o resultado dessa seção com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

Figura 6.43 - Vistas de uma pirâmide seccionada por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$  que passa pelo vértice



Fonte: Autoras.

Figura 6.44 - Vistas da peça resultante da seção

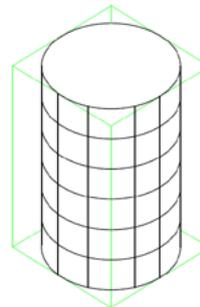


Fonte: Autoras.

### 6.2.3 Seção plana de cilindros

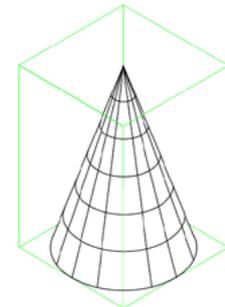
Para realizar seções planas em sólidos de revolução, como cones e cilindros, são utilizadas suas geratrizes retas e suas geratrizes curvas (mostradas nas figuras 6.45 e 6.46). Além disso, é necessário utilizar os conceitos de lei de geração e de GLVs.

Figuras 6.45 - Geratrizes retas e curvas de um cilindro reto



Fonte: Autoras.

Figura 6.46 - Geratrizes retas e curvas de um cone reto

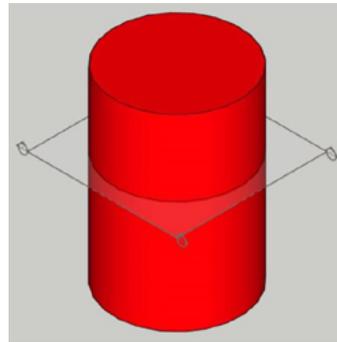


Fonte: Autoras.

Um cilindro reto será utilizado como exemplo no estudo da seção plana de cilindros. A exemplo da pirâmide serão estudadas quatro posições básicas:

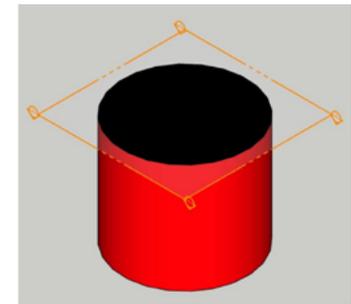
1. Plano de seção paralelo ao plano  $\pi_1$ ;
  2. Plano de seção oblíquo ao plano  $\pi_1$  sem cortar a base e o topo do cilindro;
  3. Plano de seção oblíquo ao plano  $\pi_1$  cortando o topo do cilindro;
  4. Plano de seção perpendicular ao plano  $\pi_1$ .
1. Plano de seção paralelo ao plano  $\pi_1$ : no caso do cilindro reto da figura 6.47, a seção produzida é uma circunferência igual à circunferência da base, como mostra a figura 6.48.

Figura 6.47 - Cilindro seccionado por um plano paralelo



Fonte: Autoras.

Figura 6.48 - Cilindro truncado após a seção



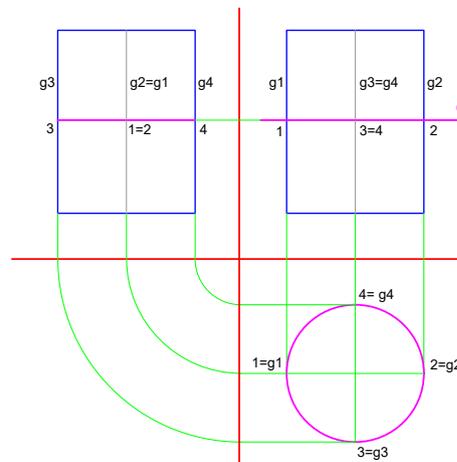
Fonte: Autoras.

A figura 6.49 mostra a representação, em vistas, da seção de um cilindro reto por um plano de seção  $\alpha$  que está paralelo ao plano  $\pi_1$ . O plano de seção  $\alpha$  está em VB nas vistas F e LD; já na vista S a área seccionada é uma região igual à da base, ou seja, uma circunferência.

Como o cilindro é um sólido redondo, para determinar os pontos da seção que “cortam” a face curva deve-se trabalhar com as GLVs. A figura 6.49 mostra a vista F e as geratrizes  $g_1$  e  $g_2$  como limites de visibilidade. A partir delas determinam-se os pontos 1 e 2 nas demais vistas. Tais pontos pertencem tanto à seção quanto à face curva do cilindro. Na mesma figura tem-se que na vista LD os limites de visibilidade são as geratrizes  $g_3$  e  $g_4$ . A partir delas foram determinados os pontos 3 e 4 em todas as vistas.

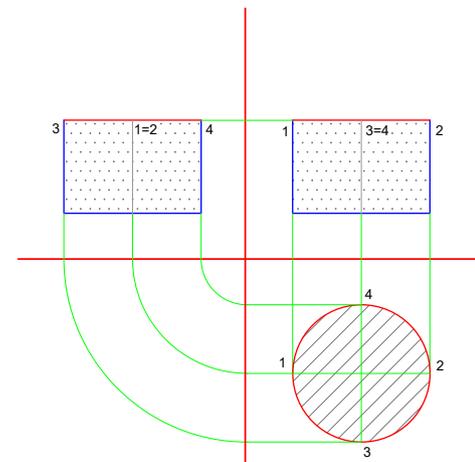
A figura 6.50 mostra o resultado dessa seção com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

**Figura 6.49 - Vistas de um cilindro reto seccionado por um plano paralelo ao plano  $\pi_1$**



Fonte: Autoras.

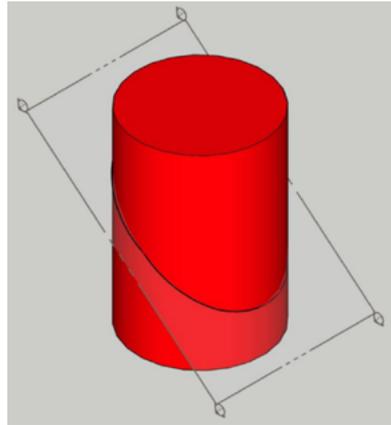
**Figura 6.50 - Vistas da peça resultante da seção**



Fonte: Autoras.

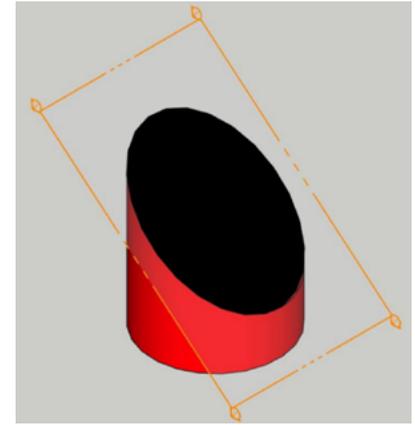
2. Plano de seção oblíquo ao plano  $\pi_1$  sem cortar a base do cilindro: no caso da figura 6.51, o plano de seção está oblíquo ao plano  $\pi_1$  e não passa pela base do cilindro, ou seja, “corta” as geratrizes retas e curvas da face curva do cilindro. A seção produzida é uma elipse, conforme mostra a figura 6.52.

Figura 6.51 - Cilindro seccionado por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

Figura 6.52 - Cilindro truncado após a seção



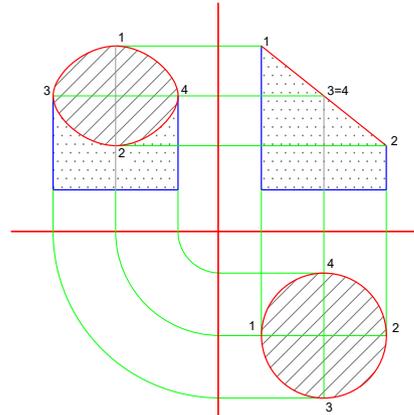
Fonte: Autoras.

A figura 6.53 mostra a representação, em vistas, da seção de um cilindro reto por um plano de seção  $\alpha$ , oblíquo ao o plano  $\pi_1$  que não passa pela base do cilindro. Na vista F este plano está em VB. Na vista S a área seccionada tem sua representação semelhante à da circunferência da base, no entanto a curva da seção é, na verdade, uma elipse. Isso ocorre porque quando a elipse é projetada na vista S ela fica aparentemente com as mesmas dimensões da base. Na vista LD a área seccionada corresponde a uma elipse, só que com dimensões reduzidas no sentido do eixo menor devido ao fato do plano que a contém estar oblíquo ao plano em que está sendo projetada.

Para determinar os pontos da seção que “cortam” o cilindro, deve-se trabalhar com as GLVs. A figura 6.53 mostra na vista F as geratrizes  $g_1$  e  $g_2$  como limites de visibilidade; a partir delas são determinados os pontos 1 e 2 nas demais vistas. Tais pontos pertencem tanto à seção quanto à face curva do cilindro. Na vista LD os limites de visibilidade são as geratrizes  $g_3$  e  $g_4$ , a partir delas são determinados os pontos 3 e 4 em todas as vistas.

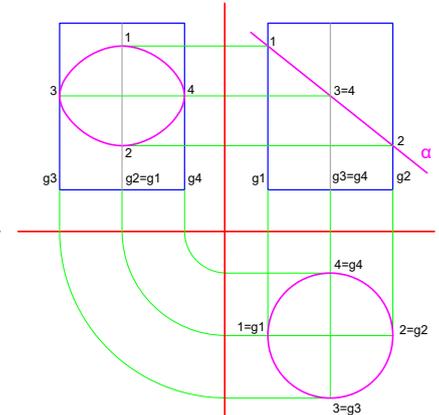
A figura 6.54 mostra o resultado dessa seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

**Figura 6.53 - Vistas de um cilindro seccionado por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$**



Fonte: Autoras.

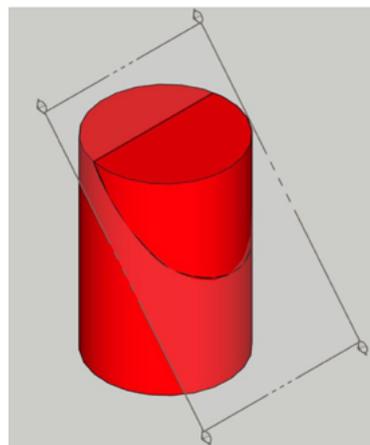
**Figura 6.54 - Vistas da peça resultante da seção**



Fonte: Autoras.

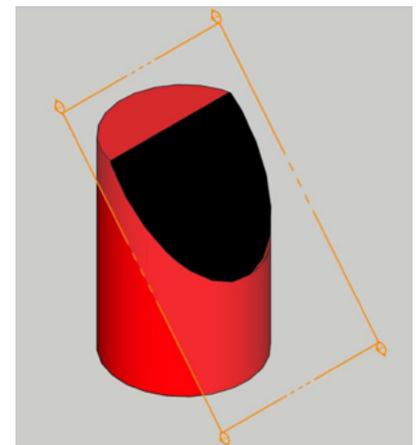
3. Plano de seção oblíquo ao plano  $\pi_1$  cortando o topo do cilindro: no caso da figura 6.55, o plano de seção está oblíquo ao plano  $\pi_1$  e “corta” o topo do cilindro. Nesse caso, a seção produzida é um arco de elipse somado a um segmento de reta, conforme mostra a figura 6.56.

**Figura 6.55 - Cilindro seccionado por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$**



Fonte: Autoras.

**Figura 6.56 - Cilindro truncado após a seção**



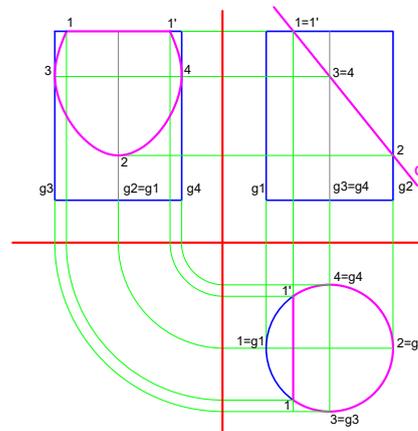
Fonte: Autoras.

A figura 6.57 mostra a representação, em vistas, da seção de um cilindro reto por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$ , o plano de seção  $\alpha$ , que passa por uma das superfícies planas do sólido. Na vista F, o plano de seção  $\alpha$  está em VB. Na vista S, a área seccionada é limitada por um arco de circunferência somado a um segmento de reta. O arco de circunferência corresponde ao arco de elipse projetado na vista S e o segmento de reta corresponde à interseção entre o plano de seção e o topo do cilindro. Na vista LD, a área seccionada também corresponde a um arco de elipse somado a um segmento de reta, aqui o arco de elipse apresenta um tamanho reduzido no sentido do eixo maior.

Para determinar os pontos da seção que “cortam” o cilindro deve-se trabalhar com as GLVs. Na vista F, os limites de visibilidade são as geratrizes  $g_1$  e  $g_2$ , porém a seção não passa pela geratriz  $g_1$ , como ilustra a figura 6.57. A partir de  $g_2$  determina-se o ponto 2 em todas as vistas. Tal ponto pertence tanto à seção quanto à face curva do cilindro. Ainda na vista F, determinam-se os pontos 1 e 1' que estão no topo do cilindro. Na vista LD, os limites de visibilidade são as geratrizes  $g_3$  e  $g_4$ , a partir delas são determinados os pontos 3 e 4 em todas as vistas.

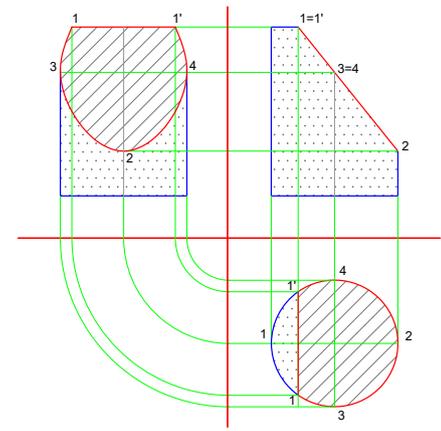
A figura 6.58 mostra o resultado dessa seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

**Figura 6.57 - Vistas de um cilindro seccionado por um plano oblíquo ao plano  $\pi_1$  que passa pelo topo do cilindro**



Fonte: Autoras.

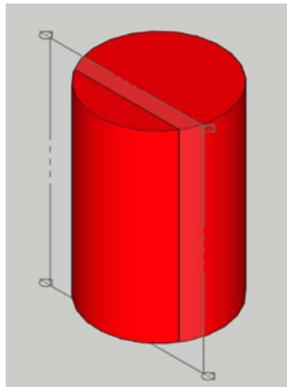
**Figura 6.58 - Vistas da peça resultante da seção**



Fonte: Autoras.

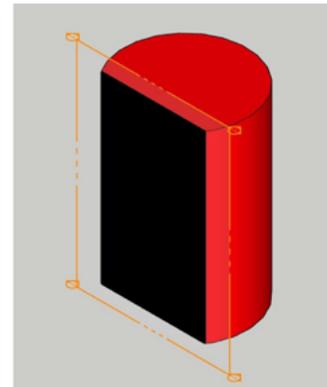
4. Plano de seção perpendicular ao plano  $\pi_1$ : no caso da figura 6.59, o plano de seção é perpendicular ao plano  $\pi_1$  e “corta” somente as geratrizes curvas do cilindro. A seção produzida é um quadrilátero (nesse caso um retângulo), sendo dois dos lados iguais às geratrizes retas e os outros dois lados secantes às circunferências da base e do topo do cilindro, conforme mostra a figura 6.60.

**Figura 6.59 - Cilindro seccionado por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$**



Fonte: Autoras.

**Figura 6.60 - Cilindro truncado após a seção**

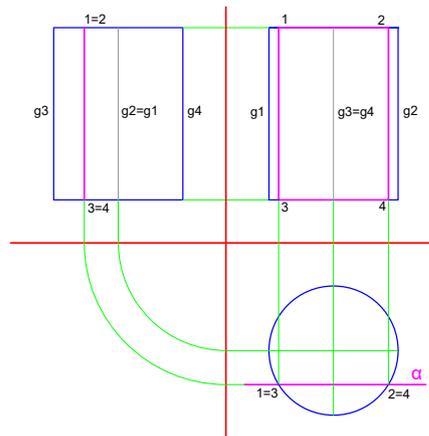


Fonte: Autoras.

A figura 6.61 mostra a representação, em vistas, da seção de um cilindro reto por um plano de seção  $\alpha$  que está perpendicular ao plano  $\pi_1$ . Nas vistas Se LD, as áreas seccionadas estão em VB e, portanto, representadas por segmentos de reta. Na vista F a área seccionada corresponde a um quadrilátero, sendo os segmentos 13 e 24 semelhantes às geratrizes retas do cilindro. Os segmentos 12 e 34 são secantes às faces planas do cilindro que têm forma de circunferência. É possível observar que o plano de seção não interceptou as GLVs.

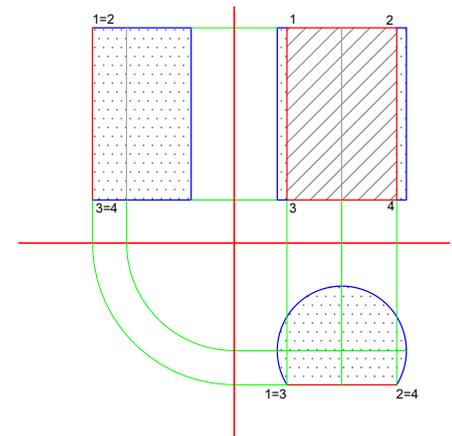
A figura 6.62 mostra o resultado dessa seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

Figura 6.61 - Vistas de um cilindro seccionado por um plano perpendicular ao plano  $\pi_1$



Fonte: Autoras.

Figura 6.62 - Vistas da peça resultante da seção

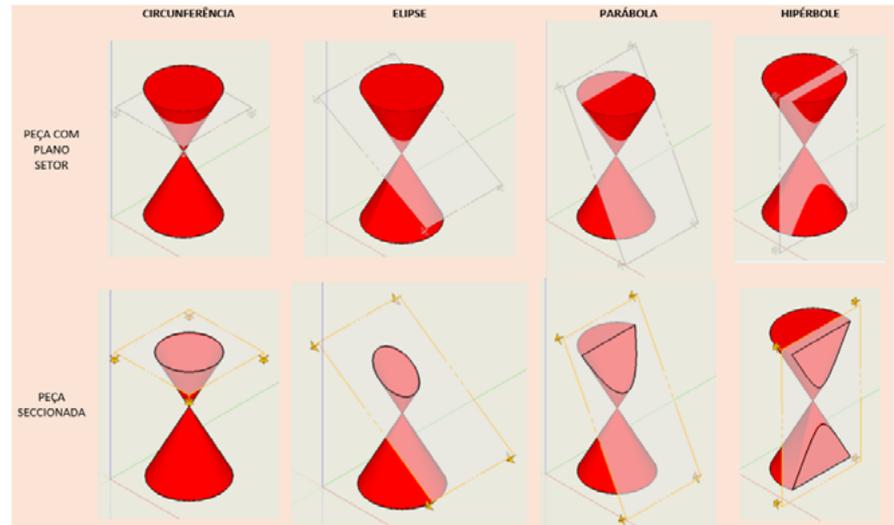


Fonte: Autoras.

## 6.2.4 Seção plana de cones

O estudo de seções planas nos cones poderia ser um capítulo à parte nesse livro. Isso porque elas geram as quatro curvas cônicas, conforme mostra a figura 6.63: circunferência, parábola, elipse e hipérbole e cada uma delas possui propriedades geométricas específicas. O tipo de curva cônica depende da posição que o plano de seção toma em relação ao **eixo do cone** quando este está “cortando” a superfície cônica.

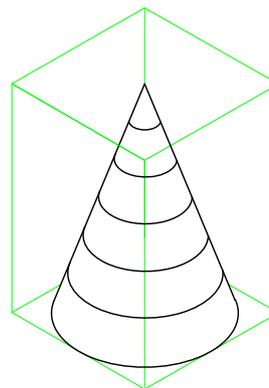
Figura 6.63 - As quatro curvas cônicas: circunferência, parábola, elipse e hipérbole



Fonte: Autoras.

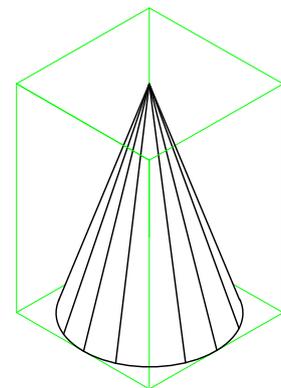
Conforme foi dito anteriormente, para trabalhar com a seção de sólidos redondos, como cilindros e cones, é necessário utilizar os conceitos de lei de geração e de geratrizes de limite de visibilidade. Para realizar qualquer seção em cones são utilizadas suas geratrizes curvas e suas geratrizes retas, as quais são mostradas nas figuras 6.64 e 6.65.

Figura 6.64 - Geratrizes curvas do cone



Fonte: Autoras.

Figura 6.65 - Geratrizes retas do cone

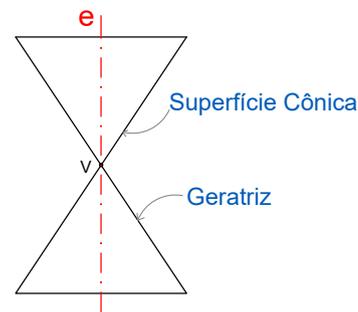


Fonte: Autoras.

Para o estudo de seções planas em cones, será utilizado como exemplo um cone reto, representado esquematicamente na figura 6.66. Diferentemente dos outros sólidos estudados, no caso dos cones serão estudadas cinco posições básicas para o plano de seção, são elas:

1. Plano de seção perpendicular ao eixo do cone (circunferência);
2. Plano de seção oblíquo ao eixo do cone (elipse);
3. Plano de seção paralelo à geratriz do cone (parábola);
4. Plano de seção oblíquo ao eixo do cone (hipérbole qualquer);
5. Plano de seção paralelo ao eixo do cone (hipérbole equilátera).

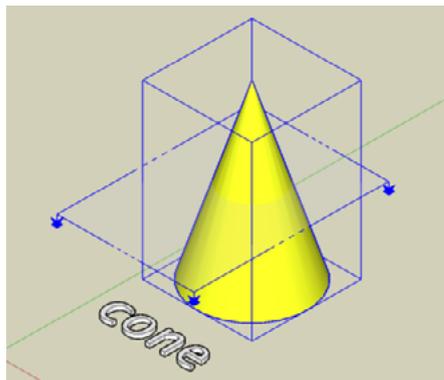
**Figura 6.66 - Vista esquemática do cone com seus elementos formadores**



Fonte: Autoras.

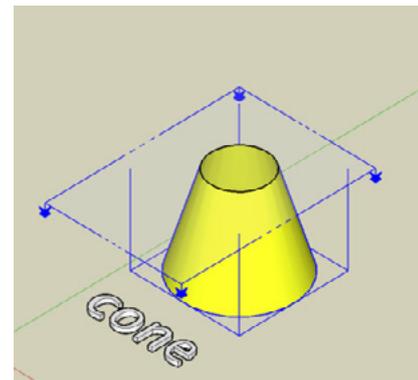
1. Plano de seção perpendicular ao eixo do cone: no caso do cone reto da figura 6.67, a seção produzida é uma circunferência semelhante à circunferência da base, como mostra a figura 6.68.

Figura 6.67 - Cone seccionado por um plano perpendicular ao eixo do cone



Fonte: Autoras.

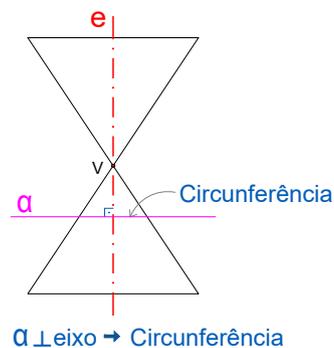
Figura 6.68 - Cone truncado após a seção



Fonte: Autoras.

A figura 6.69 mostra um cone esquemático sendo cortado por um plano de seção  $\alpha$  posicionado de maneira perpendicular ao eixo “e” do cone. Nessa situação tem-se um caso particular de seção de sólidos, o qual produz uma circunferência.

Figura 6.69 - Cone esquemático mostrando a posição do plano de seção perpendicular ao eixo do cone



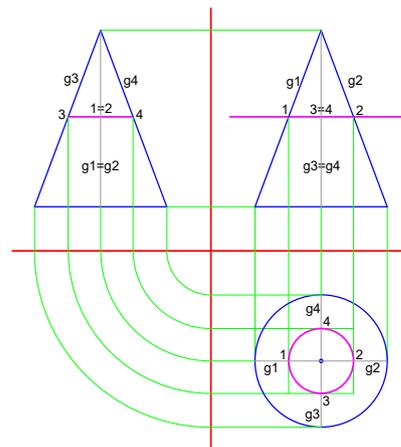
Fonte: Autoras.

A figura 6.70 mostra a representação, em vistas, da seção de um cone reto por um plano de seção que se encontra perpendicular ao seu eixo. O plano de seção  $\alpha$  está em VB nas vistas F e LD. Na vista S, a área seccionada é uma região semelhante à da base, ou seja, uma circunferência, porém com diâmetro menor.

Como o cone é um sólido redondo, para determinar os pontos da seção que “cortam” a face curva deve-se trabalhar com as GLVs. Na vista F tem-se que os limites de visibilidade são as geratrizes  $g1$  e  $g2$ . A partir delas determinam-se os pontos 1 e 2 nas demais vistas. Tais pontos pertencem tanto à seção quanto à face curva do cone. Na vista LD os limites de visibilidade são as geratrizes  $g3$  e  $g4$ , a partir delas são determinados os pontos 3 e 4 em todas as vistas.

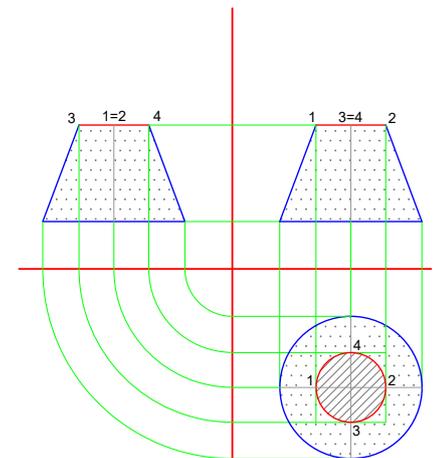
A figura 6.71 mostra o resultado dessa seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

**Figura 6.70 - Vistas de um cone seccionado por um plano perpendicular ao eixo do cone**



Fonte: Autoras.

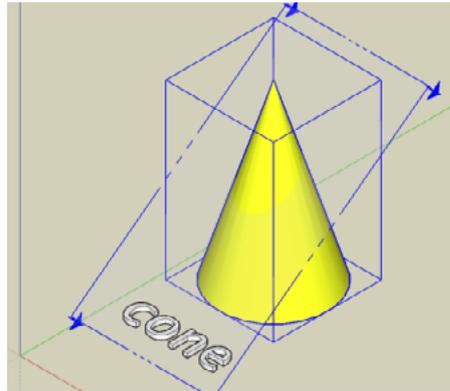
**Figura 6.71 - Vistas da peça resultante da seção**



Fonte: Autoras.

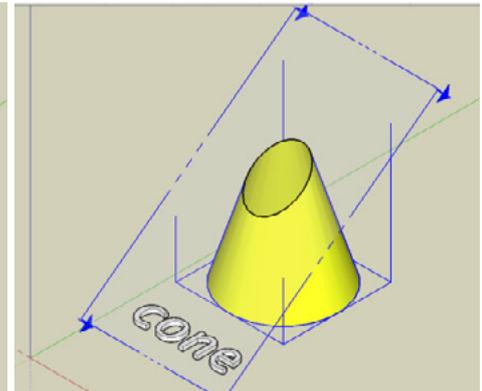
2. **Plano de seção oblíquo ao eixo do cone (elipse):** no caso da figura 6.72, o plano de seção está oblíquo ao eixo do cone, ou seja, ele “corta” as geratrizes retas e curvas da superfície curva do cone. A seção produzida é uma elipse, conforme mostra a figura 6.73.

Figura 6.72 - Cone seccionado por um plano oblíquo ao eixo do cone



Fonte: Autoras.

Figura 6.73 - Cone truncado após a seção

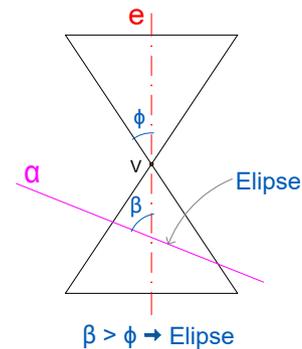


Fonte: Autoras.

A figura 6.74 mostra um cone esquemático sendo cortado por um plano de seção oblíquo ao eixo do cone. Quando o plano de seção forma com o eixo do cone um ângulo ( $\beta$ ) maior do que o ângulo que esse eixo forma com a geratriz do cone ( $\phi$ ), a seção produzida tem forma de elipse.

**Resumindo:** diferentemente da seção em forma de circunferência, caso em que o plano de seção assume somente uma posição (perpendicular ao eixo do cone) e que por essa razão é chamado de caso particular, no caso do plano de seção oblíquo é possível que ele assuma várias posições, e desde que  $\beta > \phi$ , tem-se vários casos de elipse.

Figura 6.74 - Cone esquemático mostrando a posição do plano oblíquo ao eixo do cone



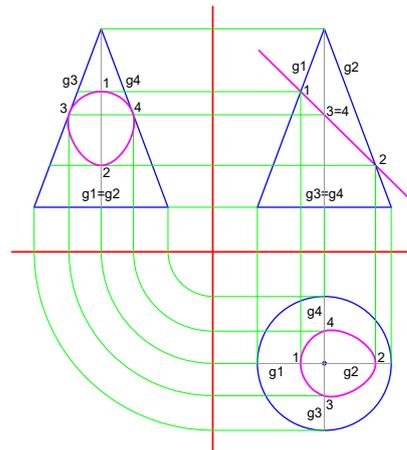
Fonte: Autoras.

A figura 6.75 mostra a representação, em vistas, da seção de um cilindro reto por um plano de seção  $\alpha$ , que está oblíquo ao eixo do cone. Na vista F, o plano de seção  $\alpha$  está em VB. Nas vistas S e LD as áreas seccionadas têm forma de elipses. Estas possuem dimensões reduzidas no sentido do eixo maior (da elipse) devido ao plano que as contém estar oblíquo ao plano em que estão projetadas.

Para determinar os pontos que definem uma seção em um cone, deve-se trabalhar com as GLVs. Na vista F, os limites de visibilidade são as geratrizes  $g_1$  e  $g_2$ , a partir delas são determinados os pontos 1 e 2 nas demais vistas. Tais pontos pertencem tanto à seção quanto à superfície curva do cone. Na vista LD, os limites de visibilidade são as geratrizes  $g_3$  e  $g_4$ , a partir delas são determinados os pontos 3 e 4 em todas as vistas.

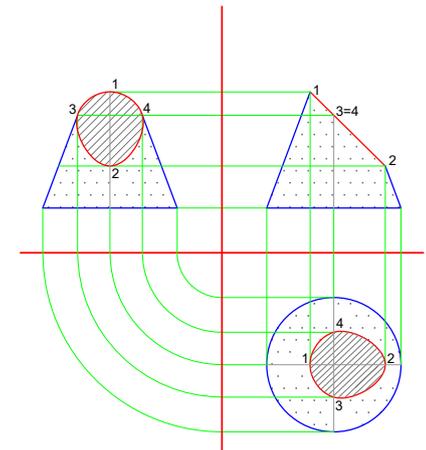
A figura 6.76 mostra o resultado dessa seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

Figura 6.75 - Vistas de um cone seccionado por um plano oblíquo ao eixo do cone



Fonte: Autoras.

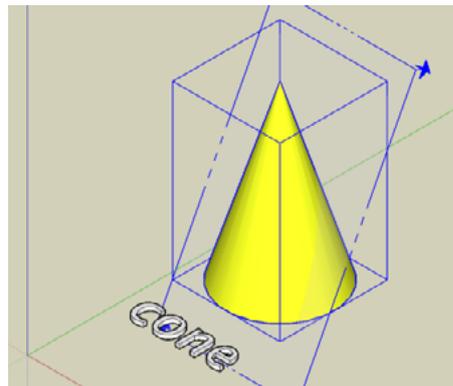
Figura 6.76 - Vistas da peça resultante da seção



Fonte: Autoras.

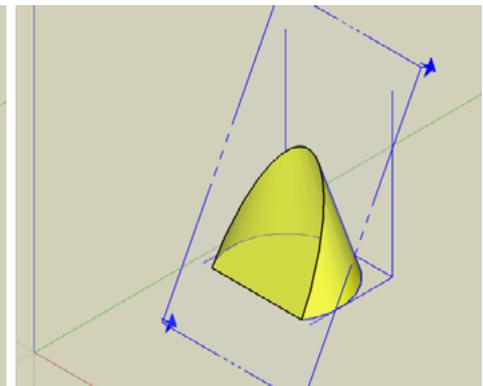
3. **Plano de seção paralelo à geratriz do cone (parábola):** no caso da figura 6.77, o plano de seção está “cortando” as geratrizes retas e curvas da superfície curva do cone. A seção produzida é uma parábola, conforme mostra a figura 6.78.

Figura 6.77 - Cone seccionado por um plano paralelo à geratriz do cone



Fonte: Autoras.

Figura 6.78 - Cone truncado após a seção

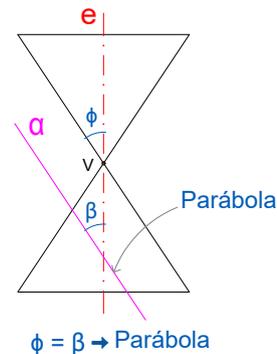


Fonte: Autoras.

A figura 6.79 mostra um cone esquemático sendo cortado pelo plano de seção  $\alpha$ . Quando o plano de seção está paralelo à geratriz do cone, ele forma um ângulo  $\beta$  com o eixo do cone que possui a mesma grandeza do ângulo que a geratriz do cone faz com o eixo, o ângulo  $\phi$ . Nesse caso, a seção resultante tem a forma de uma parábola.

Importante: a parábola também é um caso particular que acontece apenas quando o ângulo  $\beta$  é igual ao ângulo  $\phi$ .

Figura 6.79 - Cone esquemático mostrando a posição do plano de seção paralelo à geratriz



Fonte: Autoras.

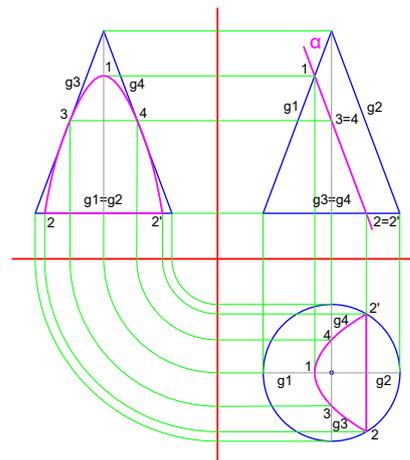
A figura 6.80 mostra a representação, em vistas, da seção de um cone reto por um plano de seção  $\alpha$  que é paralelo à geratriz do cone,  $g_2$ . Na vista F o plano de seção  $\alpha$  está em VB. Já nas vistas S e LD, as áreas seccionadas correspondem a parábolas somadas a segmentos de reta, de forma a fechar uma linha poligonal. Tais parábolas possuem dimensões reduzidas no sentido do eixo maior (de elipse) devido ao plano que as contém estar oblíquo ao plano em que estão projetadas.

Para determinar os pontos da seção que “cortam” o cone, deve-se trabalhar com as GLVs. Na vista F é possível identificar que as geratrizes

são  $g1$  e  $g2$ . A partir de  $g1$  determina-se o vértice da parábola, o ponto 1. Ainda na mesma vista, define-se os pontos 2 e 2' na base do cone, que está em VB. Deve-se determinar os pontos 1, 2 e 2' em todas as vistas. Na vista LD os limites de visibilidade são as geratrizes  $g3$  e  $g4$ , a partir delas foram determinados os pontos 3 e 4, em todas as vistas.

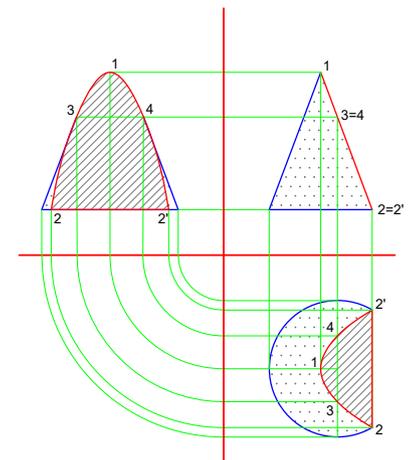
A figura 6.81 mostra o resultado dessa seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos).

Figura 6.80 - Vistas de um cone seccionado por um plano paralelo à geratriz



Fonte: Autoras.

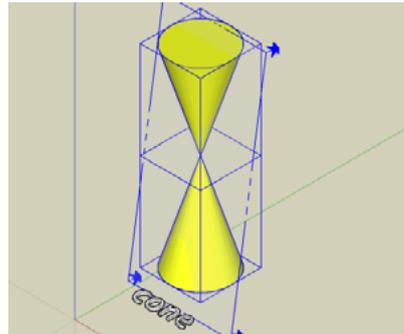
Figura 6.81 - Vistas da peça resultante da seção



Fonte: Autoras.

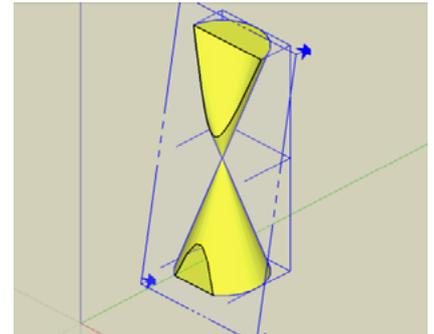
4. **Plano oblíquo ao eixo do cone (hipérbole qualquer):** no caso da figura 6.82, o plano de seção está oblíquo ao plano do eixo do cone, "cortando" as geratrizes retas e curvas da face curva do cone. A seção produzida é uma hipérbole qualquer, conforme mostra a figura 6.83.

Figura 6.82 - Cone seccionado por um plano oblíquo ao eixo do cone



Fonte: Autoras.

Figura 6.83 - Cone truncado após a seção

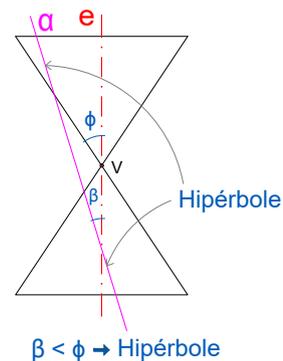


Fonte: Autoras.

A figura 6.84 mostra um cone esquemático sendo cortado por um plano de seção oblíquo ao eixo do cone.

**Resumindo:** quando este plano forma com o eixo do cone um ângulo ( $\beta$ ) menor do que o ângulo que esse eixo forma com a geratriz do cone ( $\phi$ ), a seção produzida tem forma de hipérbole. Assim, o plano de seção oblíquo ao eixo do cone pode assumir várias posições, mas se  $\beta < \phi$  tem-se vários casos de hipérbole.

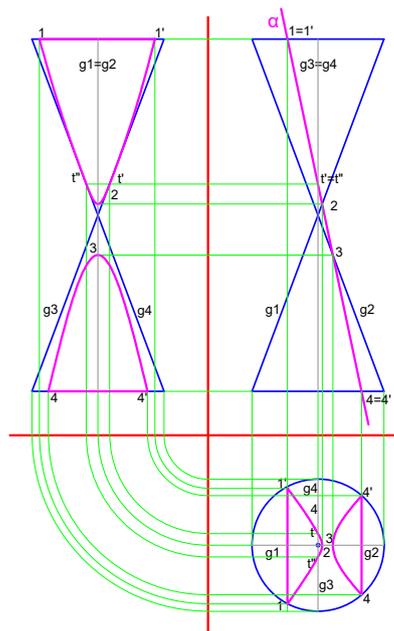
Figura 6.84 - Cone esquemático mostrando a posição do plano de seção oblíquo ao eixo do cone



Fonte: Autoras.

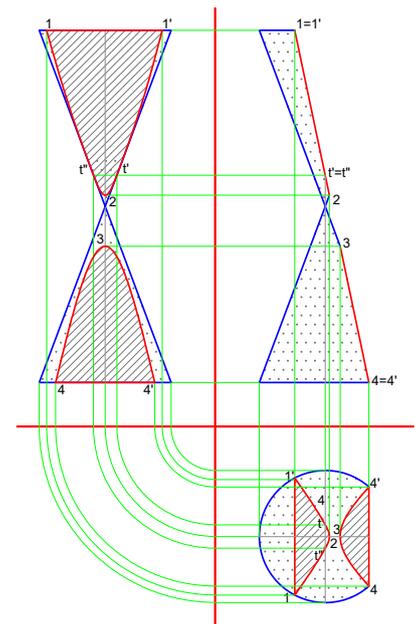
A figura 6.85 mostra a representação, em vistas, da seção de um plano oblíquo ao eixo do cone em um cone reto tendo como resultado uma hipérbole e a figura 6.86 mostra o resultado dessa seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos). Na vista F o plano de seção  $\alpha$  está em VB. Nas vistas S e LD, a área seccionada corresponde a hipérboles somadas a segmentos de reta, já que o plano de seção corta a base e o topo do sólido. As dimensões das hipérboles estão reduzidas no sentido vertical devido à obliquidade do plano que a contém em relação aos planos em que estão projetadas.

Figura 6.85 - Vistas cone seccionado por plano oblíquo ao eixo do cone



Fonte: Autoras.

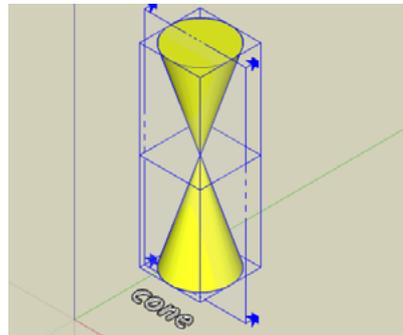
Figura 6.86 - Vistas da peça resultante da seção



Fonte: Autoras.

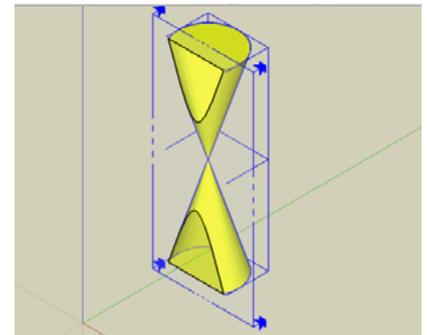
5. **Plano de seção paralelo ao eixo do cone (hipérbole equilátera):** no caso da figura 6.87, o plano de seção está paralelo ao eixo do cone, “cortando” as geratrizes curvas e passando pelas geratrizes retas da face curva do cone. A seção produzida é uma hipérbole equilátera, conforme mostra a figura 6.88. Uma hipérbole dessa natureza possui seus dois ramos com iguais características geométricas.

Figura 6.87 - Cone seccionado por um plano paralelo ao eixo do cone



Fonte: Autoras.

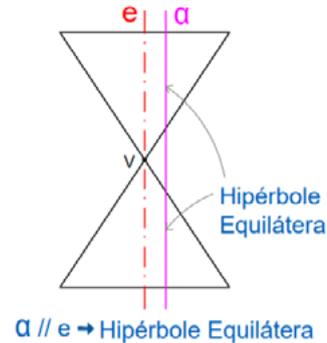
Figura 6.88 - Cone truncado após a seção



Fonte: Autoras.

**Resumindo:** a figura 6.89 mostra um cone esquemático sendo cortado pelo plano de seção. Quando o plano de seção está paralelo ao eixo do cone “e”, a seção resultante tem a forma de uma hipérbole equilátera. A hipérbole equilátera é um caso particular que acontece apenas quando o plano de seção está paralelo ao eixo “e”.

Figura 6.89 - Cone esquemático mostrando a posição do plano de seção paralelo ao eixo "e"

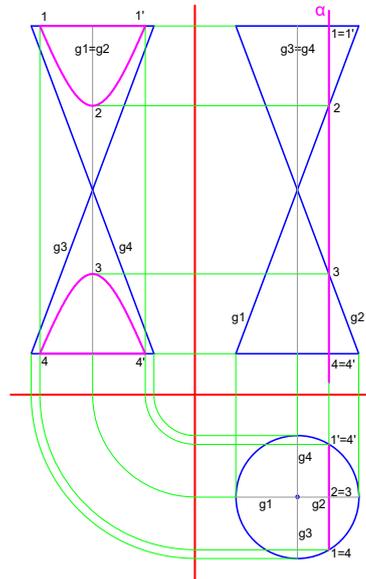


Fonte: Autoras.

A figura 6.90 mostra como fica a representação, em vistas, da seção de um plano paralelo ao eixo do cone em um cone reto e a figura 6.91 mostra o resultado dessa seção, com destaque para a área seccionada (hachura com linhas oblíquas) e para a peça resultante da seção (hachura com pontos)

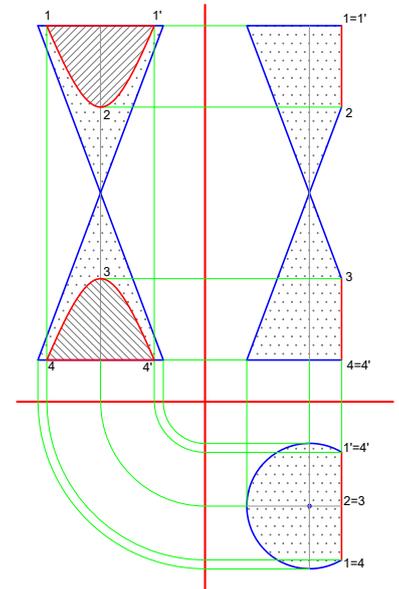
Na vista F o plano de seção  $\alpha$  está em VB. Na vista S, a área seccionada também está em VB, de forma a fechar uma linha poligonal. Na vista LD, a área seccionada corresponde a uma hipérbole somada a dois segmentos de reta (devido à interseção entre o plano de seção, o topo e a base do cone) com dimensões em VG já que o plano de seção está paralelo ao plano de projeção da vista LD.

Figura 6.90 - Vistas de um cone seccionado por um plano paralelo ao eixo do cone



Fonte: Autoras.

Figura 6.91 - Vistas da peça resultante da seção



Fonte: Autoras.

Para determinar os pontos da seção que “cortam” o cone, deve-se trabalhar com as GLVs. Na vista F, as geratrizes são  $g_1$  e  $g_2$ . A partir delas determina-se os pontos 2 e 3, em todas as vistas. Tais pontos pertencem tanto à seção como à face curva do cone. Na vista LD, os limites de visibilidade são as geratrizes  $g_3$  e  $g_4$ . Observa-se que não há pontos que tangenciam essas geratrizes. No topo e na base foram determinados dois pares de pontos, que são: 1, 1' e 4, 4', em todas as vistas.

## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 10067**: princípios gerais de representação em desenho técnico. São Paulo, 1995.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6492**: documentação técnica para projetos arquitetônicos e urbanísticos — Requisitos. São Paulo, 2021.
- BORTOLUCCI, M. A. (org.) **Desenho Técnico**: teoria & prática. São Carlos: SAP/ EESC-USP, 2005.
- CHAPUT, F. I. **Elementos de Geometria Descritiva**: com numerosos exercícios. 18ed. Trad. Dr. Eugênio de Brarros Raja Gabaglia. Rio de Janeiro: Editora F. Briguier e Cia., 1966.
- CHAPUT, F. I. **Elementos de Geometria**: contendo noções sobre as curvas usuais e numerosos exercícios numéricos. 14ed. Trad. Dr. Eugênio de Brarros Raja Gabaglia. Rio de Janeiro: Editora F. Briguier e Cia., 1954.
- COSTA, J. D. **Introdução ao Desenho**: sistemas de representação gráfica. Apostila da Disciplina Introdução ao Desenho, [S.l.]: [S.n.], 2008.
- COSTA, M. D.; COSTA, A. P. de A. V. **Geometria gráfica tridimensional**: sistemas de representação. v. 1, 3 ed. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996.
- MACHADO, A. **Geometria descritiva**: teoria e exercícios. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976.
- MELO, S. de S. **As transformações geométricas**: isometrias, semelhanças, afinidades, projetividades. Apostila da Disciplina Geometria Projetiva. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2020.
- MICHAELIS. **Michaelis**: moderno dicionário da língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2022. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/>. Acesso em: 26 jul. 2022.
- MILLAR, J. B. **Elements of Descriptive Geometry**. Londres: MacMillan and Co., 1887.
- RANGEL, A. P. **Projeções cotadas**: desenho projetivo. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1976.
- SÁ, R. **Edros**. São Paulo: Projeto, 1982.
- SILVA, E. **Uma introdução ao projeto arquitetônico**. 2ed. Rev. Amp. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 1998.
- SILVA, L. P. M. **Sólidos geométricos**. UOL. Mundo Educação, c2022. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/solidos-geometricos.htm>. Acesso em: 21 jul. 2022.

## ÍNDICE REMISSIVO

### A

arquitetura 12, 14, 17, 25, 28, 42, 44

### C

Cavaleira 12, 29, 34, 41, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 59, 62, 66, 67, 70, 73, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 95, 106, 122, 128, 129, 132, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 148, 154

Cilindros 64, 66, 67, 90, 147

circunferência 36, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 90, 91, 92, 93, 94, 140, 141, 149, 152, 157, 159, 190, 192, 208, 210, 212, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220

cones 64, 66, 67, 69, 90, 91, 134, 140, 151, 207, 215, 216, 217

### D

desenho técnico 12, 25, 26, 28, 30, 36, 41, 42, 45, 105, 110, 116, 230

design 12, 14, 16, 17, 25, 28, 42, 44

dimensões 22, 23, 25, 26, 27, 42, 63, 83, 86, 90, 109, 116, 117, 122, 159, 168, 176, 199, 204, 210, 221, 223, 226, 228

### E

eixo 49, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 66, 68, 72, 73, 86, 88, 89, 101, 131, 135, 137, 140, 141, 147, 152, 156, 190, 192, 210, 212, 215, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229

elementos básicos 19, 20

elementos geométricos 166

elipse 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 100, 141, 156, 160, 209, 210, 211, 212, 215, 216, 217, 220, 221, 223

engenharias 12, 17, 25, 44

esfera 23, 36, 104, 132, 140, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 191, 192, 193

expressão gráfica 12, 14, 17, 25, 42, 44, 196

### G

Geometria Descritiva 16, 104, 105, 109, 165, 178, 230

Geometria Gráfica 12, 13, 19, 20, 116, 189, 194

geratriz 64, 65, 140, 141, 157, 192, 212, 217, 220, 222, 223, 224, 225

### H

hipérbole 215, 216, 217, 224, 225, 226, 227, 228

### I

isometria 12, 29, 41, 42, 64, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 97, 106, 122, 128, 129, 132, 134, 135, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 151, 154, 155

Isometria Simplificada 12, 29, 64, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 106, 122, 128, 129, 132, 134, 135, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 151, 155

### L

linguagem gráfica 14, 24, 25, 26, 105

### O

objetos geométricos 166

objetos tridimensionais 28, 42, 49, 104, 105

Ortoedro 22, 27, 28, 31, 32, 33, 47, 55, 61, 80, 95, 100, 106, 111, 128, 138

ortogonal 27, 28, 40, 41, 47, 79, 80, 103, 104, 106, 108, 116, 117

## P

parábola 215, 216, 217, 222, 223, 224  
paralelo 69, 71, 125, 143, 154, 156,  
161, 162, 168, 170, 172, 173, 176, 182,  
183, 184, 185, 187, 190, 197, 198, 199,  
200, 201, 202, 203, 208, 209, 217, 222,  
223, 224, 227, 228, 229

perpendicular 33, 66, 68, 71, 101, 109,  
122, 125, 126, 166, 167, 168, 169, 170,  
172, 178, 179, 182, 185, 190, 192, 197,  
199, 200, 201, 204, 205, 206, 207, 208,  
213, 214, 215, 217, 218, 219, 220

perspectiva 12, 25, 37, 38, 39, 42, 71,  
73, 171

pirâmide 132, 138, 139, 140, 191, 201,  
202, 203, 204, 205, 206, 207, 208

prismas 134, 139, 196

projeção 12, 22, 26, 27, 28, 29, 30, 31,  
33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 46, 47, 48,  
49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 63, 68,  
69, 71, 79, 80, 81, 82, 83, 90, 91, 103,  
104, 106, 108, 109, 110, 111, 112, 115,  
116, 117, 119, 120, 121, 122, 126, 128,  
134, 135, 139, 141, 142, 143, 148, 149,  
166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 176,  
182, 183, 186, 228

## R

representação gráficas 12, 44

## S

seção 140, 159, 160, 161, 162, 189,  
193, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201,  
202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209,  
210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217,  
218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225,  
226, 227, 228, 229

Seção Plana 12, 145, 188

Sistema de Vistas 12, 29, 34, 41, 64,  
103, 104, 106, 110, 111, 117, 122, 126,  
128, 129, 132, 134, 135, 138, 141, 142,  
143, 147, 148, 151, 152, 154, 157, 165,  
166, 169, 170, 171, 172

## V

Verdadeira Grandeza 12, 48, 109, 164,  
165, 188

vistas 27, 28, 33, 37, 56, 58, 61, 62,  
86, 115, 118, 121, 122, 123, 124, 125,  
126, 130, 131, 136, 137, 138, 139,  
140, 141, 142, 148, 149, 150, 152,  
153, 157, 158, 159, 167, 168, 169,  
170, 172, 173, 176, 177, 178, 182,  
183, 184, 185, 197, 199, 200, 202,  
204, 205, 206, 208, 209, 210, 212,  
214, 219, 221, 223, 224, 226, 228, 229

Vistas Ortográficas 12, 110

volume geomético 12

[www.PIMENTACULTURAL.com](http://www.PIMENTACULTURAL.com)

# REPRESENTAÇÃO GRÁFICA PARA ENGENHARIAS, ARQUITETURA, EXPRESSÃO GRÁFICA E DESIGN

projeções cilíndricas